## Introduction aux fractions

Degrés 9H Sujet mathématique Etude préliminaire des fra	ctions
---	--------

Plan de leçon réalisé par Guillaume Champion, Olivier Guignard, Adrien Gulfo, François Powolny, Christophe Triscornia, ES Renens, avec la participation de Ingrid Hoznour (ES Renens, HEP Vaud) et Laetitia Mauroux (HEP Vaud)

## Table des matières

Introduction aux fractions	1
Introduction	1
Plan d'études romand	1
Etude diagnostique	2
Représentation des fractions	3
Contenus mathématiques	3
Apprentissages visés	3
Plan de la leçon	3
Leçon 1	3
Introduction aux fractions	3
Déroulement de la leçon et difficultés des élèves	6
Commentaires (développement du plan de leçon)	6
Suite des apprentissages, prolongements de la leçon	7
Commentaires	7
Référence	8
Annexes	9
Annexes	10

## Introduction

L'enseignement des fractions au collège se confronte à des difficultés d'apprentissage dues aux préconceptions des élèves qui sont à rendre visibles dès la première approche avec l'objet d'apprentissage. Cette LS vise à mettre au point une leçon d'introduction aux fractions.

Contexte : Canton de Vaud, ES Renens, classe de 9e VG, groupe de 12 élèves , niveau 1 de mathématiques.

## Plan d'études romand

MSN 32 — Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels

Connaissance et utilisation de différentes écritures d'un même nombre.

Comparaison, approximation, encadrement, représentation sur une droite et ordre de grandeur de nombres écrits sous forme : fractionnaire dans Q+ (y compris simplification et amplification) (Niv 1-2)



#### Attentes fondamentales:

L'élève est capable :

d'amplifier, simplifier, rendre irréductible une fraction et la représenter géométriquement de comparer, ordonner, encadrer, intercaler des nombres écrits sous forme décimale ou fractionnaire dans Q+ (Niv 1).

## **Etude diagnostique**

Une évaluation diagnostique a été faite en amont de la leçon afin de se rendre compte des acquis antérieurs des élèves en termes de représentation des fractions.

Deux questions ont été posées à l'ensemble des élèves :

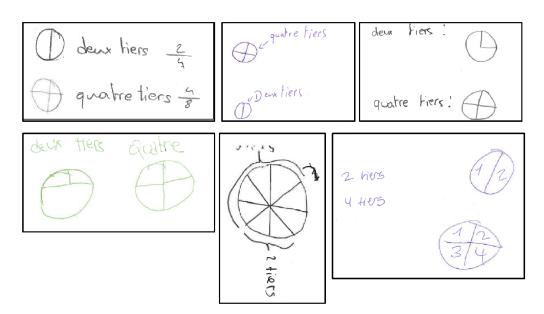
- 1. Représenter deux tiers
- 2. Représenter quatre tiers

Ces questions ont été posées en langage français et non pas sous forme numérique (2/3, 4/3) afin de ne pas suggérer le lien entre le mot tiers et le nombre 3, ou le partage en 3.

Nous avons choisi des tiers et non pas des quarts ou des demis, car ceux-ci sont moins courants dans la représentation mentale des élèves, ce qui devrait les pousser à transposer leurs préconceptions.

Ainsi, on peut penser que l'élève qui représente correctement deux tiers a déjà une bonne compréhension de ce qu'est une fraction. Or, les fractions devraient avoir été abordées en 7H et 8H; il est donc possible que certains élèves aient déjà une compréhension scolaire de ce qu'est une fraction.

Nous avons aussi voulu tester le dépassement de l'unité en demandant aux élèves de représenter quatre tiers.



Les réponses des élèves (dont ci-dessus sont reportés quelques exemples) ont montré plusieurs éléments:

- Tous ont représenté les fractions en dessinant un cercle ou un gâteau circulaire.
- Il semble qu'il y ait confusion entre un tiers et une part : ceci nous permet d'avancer l'hypothèse que le rôle du numérateur est compris, mais que celui du dénominateur ne l'est pas.
- Le vocabulaire « tiers » n'est pas correctement assimilé par les élèves.

## Représentation des fractions

### Contenus mathématiques

La représentation des fractions à dénominateur simple sans dépassement de l'unité.

### Apprentissages visés

Objectifs d'apprentissage de la leçon :

- identifier des quantités fractionnaires, les exprimer en français et en langage mathématique
- représenter schématiquement des quantités fractionnaires proposées en français et/ou en langage
- comprendre les rôles des numérateurs et des dénominateurs.

## Plan de la leçon

### Leçon 1

Introduction aux fractions

### Activité 1 (durée 10-15 minutes)

#### Tâche:

Le maître distribue une feuille de brouillon avec l'activité n°1 (annexe 1) et demande aux élèves de représenter sur cette feuille les fractions un demi, un tiers et un quart. Il s'agit d'une fiche d'exercice qui permettra de discuter avec le groupe classe des éventuelles erreurs de représentation. Les résultats corrects seront institutionnalisés ultérieurement dans le document complet (annexe 2).

## Objectifs de la tâche :

- > Mettre en évidence les préconceptions des élèves qui n'auraient pas été mises en évidence avec l'évaluation diagnostique
- > Confronter les points de vue des élèves
- > Définir la notion de dénominateur
- > Prévenir la confusion entre fraction et part

#### Action des élèves :

Représenter les fractions sur le schéma

#### Actions du maître pendant l'activité :

- > Alimentation des réflexions entre élèves, selon nécessité
- > Questionner sur la pertinence du termes génériques "part"

## Discussion des résultats en collectif :

- > Définir le contrat de représentation des parts: il faut découper entièrement le disque,
- il ne doit rien rester
- > Inclure l'égalité des parts : toutes les parts doivent être égales
- > Questionner les élèves si les découpages sont inégaux.
- > Si une seule part est dessinée, demander le critère de dimensionnement de la part et en proposer d'autres pour validation.
- > Présenter à l'écran les résultats de l'évaluation diagnostique et confronter les élèves à leurs représentations d'alors.
- > Poser la question de prolongement "Si 5 pers doivent se partager le gâteau, comment appelle-t-on les parts ?" et en questionner le vocabulaire
- > Valider ou proposer la nomenclature mathématique en la justifiant.

#### Institutionnalisation

> Faire écrire aux élèves, dans le document complet (annexe 2), le lien entre <u>de</u>mi et <u>de</u>ux, entre <u>qua</u>rt et quatre, entre tiers et trois.



> Montrer comment partager le disque en 2, en 4, mais surtout en 3.

### Remarque

Le découpage du disque en 3 parties égales est un problème de géométrie complexe pour les élèves. Certains ont tendance à commencer par tracer un diamètre et partagent ainsi le disque en 2. Le découpage en 3 parties égales devient alors très complexe et peut donner lieu au résultat suivant qu'il faut discuter à la lumière de l'égalité des parts (figure ci-contre).

### Anticipation des difficultés des élèves ou de leurs progrès possibles:

- Persistance de la signification "part" pour le dénominateur
- Découpages sans lien avec la valeur du dénominateur
- Découpages inégaux
- Représentation d'une seule part sur le disque (correspondante ou non à la quantité recherchée)
- Déclic depuis l'évaluation diagnostique

Matériel et support : Fiche de travail activité 1(annexe 1) et document complet (annexe 2)

## Activité 2 (durée 5 minutes)

Tâche: Représenter un cinquième, un sixième, un huitième et un douzième dans un cercle.

Objectif de la tâche : Généralisation du concept de part.

Actions du maître: Mettre les élèves au travail, circuler dans la classe et aider au besoin.

Action des élèves : Représentent les parts demandées.

### Anticipation des difficultés des élèves:

- complexité des découpages (notamment, un cinquième et un sixième)
- respect de l'égalité des parts

Matériel et support : Document complet, activité 2 (annexe 2)

## Activité 3 (durée 5 minutes)

Tâche: Associer les langages français et mathématique, activité 3 (annexe 2)

**Objectif de la tâche :** Passage de la représentation schématique mathématique à une expression en français

Actions du maître : Mettre les élèves au travail, circuler dans la classe et aider au besoin.

**Action des élèves :** Associent les langages français et mathématique.

## **Anticipation:**

- comptage erroné
- difficultés orthographiques
- Confusion entre le nombre de parts et le produit (huit pizzas ou ¼ de pizza)

Matériel et support : Document complet, activité 3 (annexe 2)

### Activité 4 (durée 15 à 20 minutes)



Tâche: "Exprime en français quelle part de gâteau a été coloriée"

**Objectif de la tâche :** Exercer la notion de numérateur en quantifiant le nombre de parts coloriées et introduire la pertinence de l'écriture mathématique

Actions du maître: Mettre les élèves au travail, circuler dans la classe et aider au besoin.

- valider les constats et suggérer le recours à une écriture mathématique
- institutionnaliser l'écriture mathématique
- définir les termes "numérateur", "dénominateur", "fraction"
- introduire et lier les diverses formulations (par exemple "trois sur quatre" et "trois quarts"

Action des élèves : Écrivent en français les quantités représentées

## Anticipation des difficultés des élèves :

- confusion entre numérateur et dénominateur
- découverte de la "lourdeur" de l'écriture non mathématique

Matériel et support : Document complet, activité 4 (annexe 2)

### Activité 5 (durée 10 minutes)

Tâche: "Quelle fraction associerais-tu à chaque dessin?"

**Objectif de la tâche :** Entraîner et généraliser les notions travaillées durant la leçon (numérateur et dénominateur)

Actions du maître : Mettre les élèves au travail, circuler dans la classe et aider au besoin.

Action des élèves : Effectuent la tâche demandée.

### Anticipation des difficultés des élèves :

- confusion numérateur et dénominateur
- difficulté d'interprétation aux exercices j et k: les représentations se font au-delà de l'unité

Matériel et support : Document complet, activité 5 (annexe 2)

## Activité 6 (durée en fonction du temps à disposition)

Tâche: Faire les exercices NO 168, 169, 171 du livre de maths 9H

**Objectif de la tâche**: Entraîner et généraliser les notions vues durant la leçon dans des contextes différents.

**Actions du maître :** Mettre les élèves au travail, circuler dans la classe et aider au besoin. Observation.

Action des élèves : Effectuent la tâche demandée.

## Anticipation des difficultés des élèves:

- difficultés à transférer les notions de dénominateur et de numérateur à des figures géométriques non circulaires.
- notion de l'égalité des parts non acquise

Matériel et support: "Mathématiques 9-10-11", livre 9e, ed. LEP/CIIP et cahier de cours.



## Déroulement de la leçon et difficultés des élèves

Globalement, les objectifs que nous nous étions fixés pour la leçon ont été atteints, et il apparaît que les élèves ont appris les notions de fraction, numérateur et dénominateur, et sont maintenant capables de les employer dans des contextes fondamentaux variés. Les élèves sont capables de passer d'un langage mathématique au français et vice versa. Cependant, quelques points, parfois inattendus, sont à relever et sont listé dans le chapitre suivant.

## Commentaires (développement du plan de leçon)

- Les objectifs temporels n'ont pas été tenus, parce que le maître a privilégié la compréhension des élèves (d'entente avec les autres membres du groupe LS).
- Les élèves n'ont pas pu faire de lien entre les représentations qu'ils avaient effectuées lors de l'évaluation diagnostique et la situation durant l'activité 1; l'évaluation diagnostique était trop éloignée dans le temps (2 mois) pour faire du sens pour eux. Nous aurions dû effectuer cette évaluation dans la semaine précédant la leçon de recherche pour que la comparaison soit pertinente pour les élèves.
- Un savoir s'était apparemment construit chez les élèves dans l'intervalle entre l'évaluation diagnostique et la leçon de recherche. Très peu de leurs représentations dans l'activité 1 étaient semblables à celles de l'évaluation diagnostique.
- La division d'un tout en parties égales n'a pas posé de problèmes conceptuels pour les élèves, témoin un de leurs commentaires: 'Il faut tout partager, on ne peut pas garder les restes du gâteau'.
- La technique pour partager les cercles en parts égales a, par contre, posé des problèmes: le savoir-faire n'était pas acquis, malgré les précisions de l'enseignant. La première activité s'est donc muée en partie en exercice de géométrie, déviant ainsi de l'objectif que nous avions donné à la tâche. Cela s'est répercuté sur le temps dévolu à la tâche mais pas sur la capacité des élèves à transposer les connaissances acquises.
- Le lien entre 'tiers' et 'trois', 'demi' et 'deux', 'quart' et 'quatre' n'a posé aucun problème; les élèves ont directement réinvesti ces termes.
- Rien de persistant dans les commentaires ou les réponses des élèves ne laisse entendre qu'il y ait un doute quant à la distinction entre 'part' et 'dénominateur'. Peut-être n'était-ce qu'une fausse analyse de l'évaluation diagnostique de notre part.
- Le passage à une écriture mathématique au détriment d'une écriture en français a été rapide et naturelle pour les élèves. Ils n'ont pas attendu 17/18 pour y arriver, contrairement à ce que nous avions anticipé.
- Durant les activités 4, 5 et les exercices du livre (dénombrement de parts), il y a eu une confusion dans ce qu'il fallait compter pour le numérateur: les parts colorées ou les parts blanches. Il s'agit d'une précision dont il faudra tenir compte durant la suite de la séquence sur les fractions.
- Le dépassement de l'unité proposé dans les exercices j et k de l'activité 5 a été un obstacle pour tous les élèves. Cela donne des indications utiles pour la construction de la suite de la séquence.
- Un des éléments non anticipés a été le fait que certains élèves se sont sentis confus lorsque l'entier de la figure n'était pas partagé en parts égales, et qu'il a fallu rétablir cela pour obtenir la valeur du dénominateur. Il faudra tenir compte de cette information lors de la planification de la suite de la séquence.
- Il n'y a pas eu de confusion apparente, au moment où les activités des moyens d'enseignement ont été proposées, pour appliquer les notions apprises dans des figures qui n'étaient pas circulaires. Donc ce que les maîtres ont pensé être un obstacle important n'en était en fait pas un.
- Il y a observé une grande rapidité de mise au travail des élèves.
- Les élèves n'ont pas remis en question leur méthode de découpage géométrique des cercles après que le maître ait montré une technique géométrique efficace.
- Cette leçon a permis à des élèves qui habituellement n'arrivent pas à terminer les activités demandées d'arriver au bout de toutes les tâches en montrant leur satisfaction.
- Cette leçon a également permis à certains élèves de montrer leur compréhension plus avancée du sujet, notamment en abordant la multiplication des fractions de manière intuitive.



## Suite des apprentissages, prolongements de la leçon

Cette leçon a révélé d'importantes informations concernant les apprentissages des élèves car elle a réussi à les rendre visibles (Murata, 2011), et à suggérer certains noeuds à résoudre dans la suite de la séquence:

Une chose à ne PAS travailler durant cette leçon introductive:

 La technique de dessin géométrique (règle et compas) de construction des partages régulier du cercle. Il faut laisser aux élèves leur part d'intuition au moment du partage des cercles, car cela ne représente pas un obstacle épistémologique pour les élèves. Les techniques de dessin géométrique pourraient faire l'objet d'un chapitre à part.

Parmi les choses à faire dans la suite de la séquence d'enseignement:

- Il faut remettre en chantier le problème des fractions dépassant l'unité.
- Utiliser les partages complexes (par exemple pour passer des tiers aux sixièmes) pour travailler la notion d'équivalence des fractions.
- Il faut partir du fait que les élèves ont mentionné des additions et des multiplications pour commencer à travailler les opérations de base avec les fractions.

## **Commentaires**

- Il est important de procéder à une évaluation diagnostique avant la rédaction définitive du plan de leçon. Ceci afin de mettre en évidence les préconceptions et connaissances antérieures des élèves mais également pour modifier la leçon si nécessaire et se référer aux modèles familiers des élèves ( De Vecchi & Giordan, 2003; Perrenoud, 2003).
- Le contrat didactique concernant la définition de fraction doit être clair pour les élèves et précis mathématiquement: mention du partage de l'entier du tout et du partage en parts égales.
- L'intention didactique du moment de partage par le groupe classe des représentations des élèves suite à l'activité 1 doit être définie en termes d'attentes didactiques.
- La représentation en cercles n'est pas forcément la meilleure (Watanabe, 2007, Deruaz & Clivaz, 2018, Lewis & Perry,, 2017) mais tous les élèves ont montré, durant l'évaluation diagnostique, des représentations en cercles. Il nous a donc semblé pertinent de partir de leur modèle. La situation finale, lors des exercices de généralisation du livre de maths, avec des représentations non circulaires, a montré que cette entrée en matière n'avait pas été un obstacle pour les élèves du moment où elle a permis l'apprentissage des notions visées par la leçon.
- Cette leçon a démontré que lorsque les définitions mathématiques trouvaient une correspondance avec une modélisation intégrée, l'acquisition du vocabulaire disciplinaire ne posait pas de problèmes contrairement à ce qui avait été considéré comme un obstacle d'apprentissage (dénominateur, numérateur, fractions): Fear of a name increases fear of the thing itself (Rowling, 1997).
- Cette leçon à mis en évidence l'importance des consignes même lorsque l'on choisit le déterminant:
   UN huitième (ce qui était demandé) n'est pas la même chose que DES huitièmes ou EN huitièmes (ce qui était en fait attendu).
- Le maître doit être conscient que pour construire un partage précis d'un cercle, on peut partager l'angle au centre (ici un angle plein) mais il doit aussi être conscient que certains élèves se représentent ce partage comme le partage d'une circonférence, donc d'une longueur. Ainsi, ne montrer qu'une des deux méthodes peut créer un conflit épistémologique chez les élèves.
- Cette leçon, comme toutes les leçons, aurait mérité d'être plus concrète dans la récolte des traces qui permettent de tirer ces conclusions.

### Référence

Deruaz, M., & Clivaz, S. (2018). *Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Lewis, C., & Perry, R. (2017). Lesson study to scale up research-based knowledge: A randomized, controlled trial of fractions learning. *Journal for research in mathematics education*, *48*(3), 261-299.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. In Hart, L. C. et al. (Eds., 2011), Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education. Springer Science + Business Media.

DeVecchi J.-L. & Giordan, A. (2003). L'enseignement scientifique. Comment faire pour que ça marche. Delagrave Pédagogie et Formation Edition.

Rowling, J. K. (1997). Harry Potter and the Philosopher's Stone, Bloomsbury, London

Perrenoud, P. (2003). Qu'est-ce qu'apprendre. Enfances & Psy, 4(24), 9-17.

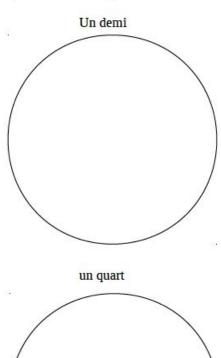
Watanabe, T. (2007). Initial treatment of fractions in Japanese textbooks. Focus on Learning Problems in Mathematics, 29(2), 41.

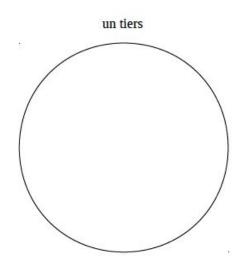


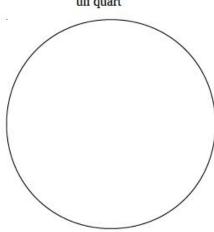
## **Annexes**

## **Annexe 1**

Représente sur les figures suivantes :







# **Les fractions**

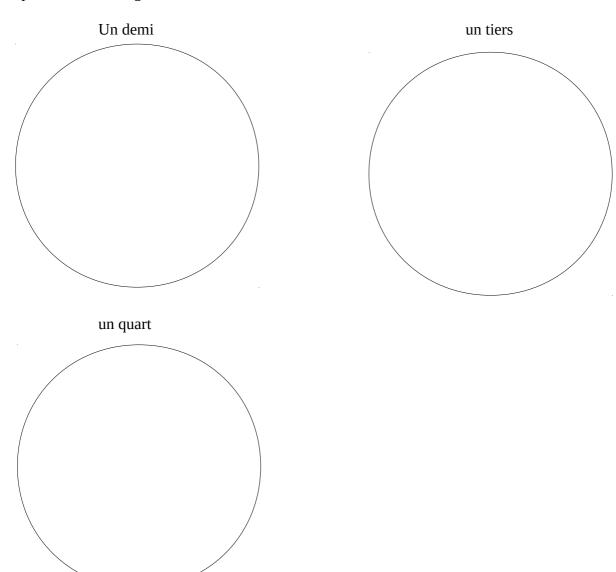
## Objectifs d'apprentissage

L'élève est capable de

- Représenter ou interpréter une fraction à partir d'une expression en Français
  - sous forme d'un dessin
  - sous forme de langage mathématique

## Activité 1:

Représente sur les figures suivantes :

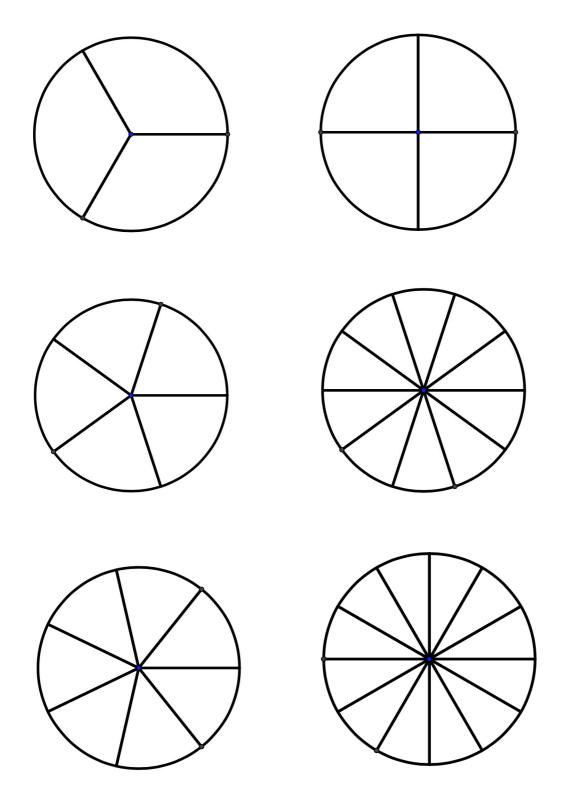


Activité 2 :

Représente maintenant : Un cinquième un huitième un douzième un sixième

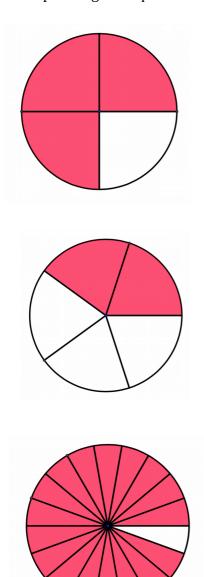
Activité 3 :

A quelle expression en Français associes-tu ces dessins ?



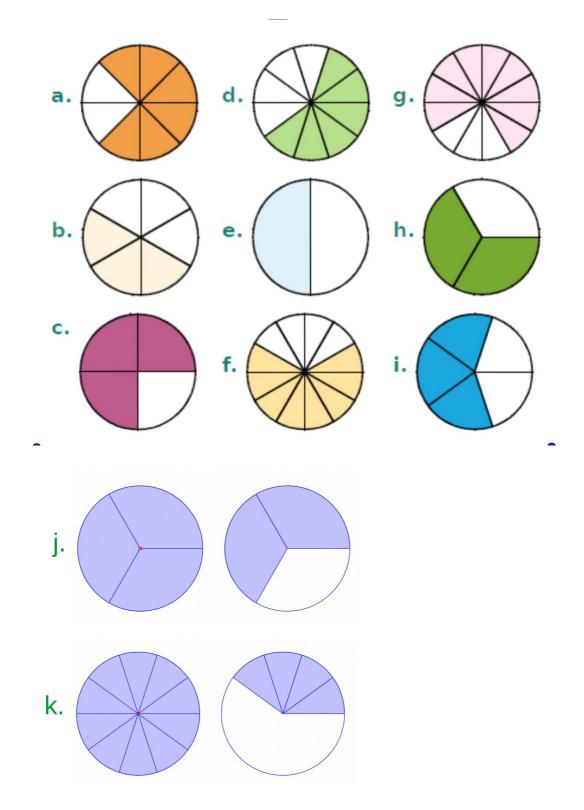
Acivité 4 :

Exprime la part de gâteau que François a mangé :



Activité 5 :

A quelle fraction associes-tu les représentations suivantes ?



## Pour approfondir:

□ NO 169 F □ NO 168

□ NO 171 F

Va voir sur: <a href="https://www.geogebra.org/m/xgpQqsKA">https://www.geogebra.org/m/xgpQqsKA</a>