Résolution de problèmes
Promotion

Degrés	5H, 6H	Sujet mathématique	Proportionnalité
Plan de leçon réalisé par le groupe LSM : Alexandra Weber, Emilie Baud, Kathrin Baetschmann, Olga Molina, Véronique Reichen, Virginie Florey (EP Floréal, Lausanne), Martine Balegno (EP Pully-Paudex-Belmont), Anne Clerc, Stéphane Clivaz (HEP Vaud).			

Table des matières

Plan d'Études Romand

La leçon est organisée autour de la résolution d'un problème numérique. Il s'agit de favoriser l'appropriation de de modes de penser propres à la résolution de problèmes. Dans le cas présent, le problème traite de proportionnalité.

MSN 23 — Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs...

- ...en traduisant les situations en écritures additive, soustractive, multiplicative ou divisive
- ...en sélectionnant les données numériques à utiliser

ÉLÉMENTS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

- tri et organisation des informations (liste, tableau, schéma, croquis,...)
- mise en œuvre d'une démarche de résolution
- ajustement d'essais successifs
- pose d'une conjecture, puis validation ou réfutation
- déduction d'une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- réduction temporaire de la complexité d'un problème
- vérification, puis communication d'une démarche et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats
- acceptation ou refus d'un résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur, la connaissance des opérations ou la confrontation au réel
- traduction des données d'un problème en opérations arithmétiques
- Résolution de problèmes multiplicatifs et divisifs : situations [...] de proportionnalité

MULTIPLES, DIVISEURS, SUITES DE NOMBRES

- Recherche des multiples d'un nombre

Indication pédagogique

Proposer des problèmes variés permettant aux élèves de se construire des représentations complètes des différents types de situations à résoudre

Certains élèves confondent augmentation (ou diminution) et proportionnalité, pensant que toute augmentation est forcément proportionnelle et utilisent de ce fait la proportionnalité à mauvais escient

De plus, certains élèves pensent qu'il y a proportionnalité si on ajoute un même nombre aux deux nombres ou grandeurs proportionnels, l'idée d'augmentation étant souvent liée à l'addition (celle de diminution à la soustraction)

MSN 25 — Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques…

- … en imaginant et en utilisant des représentations visuelles (codes, schémas, graphiques, tableaux,…)
- … en identifiant des invariants d'une situation
- … en triant et organisant des données

Promotion (fiche prof)

La tâche « En Promotion » est proposée dans les moyens d'enseignement COROME 6H (4P). La mise en œuvre proposée ici résulte d'une adaptation de la tâche d'origine.
Le but de la leçon, telle que proposée ici, est de permettre à chaque élève de se construire une représentation du problème. L'accent est donc mis sur l'aide à cette représentation plus que sur la résolution du problème. Ceci explique notamment le temps laissé aux élèves pour démarrer individuellement la tâche.

Contenu mathématique

- Proportionnalité
- Multiple commun

Matériel

Fiche Promotion (Annexe)
Fiches Une autre promotion (Prolongement, en annexe)
Sachets plastique et jetons à disposition

Gestion

- L'enseignant-e distribue une fiche énoncé à chaque élève et précise qu'il s'agit d'un travail individuel.
- Les élèves prennent connaissance de la consigne et travaillent individuellement quelques minutes.
- En collectif, l'enseignant-e :
    - Vérifie la compréhension du vocabulaire de la consigne, notamment du terme « avantageux ».
    - Demande à la classe ce que l'on cherche dans ce problème, ce qui doit être comparé.

  A travers ce premier échange, on cherche à faire émerger que :
    - Il faut un élément commun pour pouvoir comparer.
    - Il faut avoir le même nombre de ballons pour pouvoir comparer.
- En cas de difficultés, il/elle peut proposer de chercher le paquet le plus avantageux pour 24 ballons.
- Les élèves poursuivent individuellement leur résolution du problème, éventuellement pour 24 ballons ou pour une autre proposition qui aurait émergé du collectif.
- Après un temps de recherche individuelle, en collectif l'enseignant-e :
    - Propose éventuellement à un ou plusieurs élève-s d'expliquer ce qu'il a fait.
    - Pointe sur le fait que le problème demande de comparer.
    - Relève qu'une comparaison demande des éléments communs/comparables.
    - Si 24 a été proposé, revient sur le pourquoi de ce 24.
    - Demande quel serait le paquet le moins cher pour acheter 36 ballons.
- Un temps est donné aux élèves qui n'ont pas encore résolu le problème pour poursuivre leur recherche (il est possible de leur proposer des sachets et des jetons comme aide à la représentation du problème). La fiche « Une autre promotion » est proposée comme prolongement aux élèves qui ont réussi à résoudre le problème.
- Un dernier collectif peut être proposé demandant aux élèves ce qu'ils retiennent, ce qu'ils ont appris.

Démarches proposées par les élèves

1) Quelques démarches/stratégies d'élèves problématiques :
    - Estimer le paquet le plus avantageux (*en gros c'est celui-là*) sans chercher à obtenir mathématiquement sa réponse.
    - Compter les paquets de ballons sur le dessin.
    - Rechercher le coût d'un ballon dans chaque paquet (les élèves ne maîtrisent ni la division, ni les nombres rationnels) (*un élève écrit 1 ballon = … Fr*)

2) Quelques démarches/stratégies d'élèves permettant la représentation/résolution du problème :
   - Dessiner des paquets de ballons.
   - Additionner le nombre de ballon (12+12 ; 6+6+6+6…) en s'aidant du dessin des paquets de ballons.
   - Chercher le plus grand nombre de ballons pour un même prix.
   - Chercher le prix pour 120 ballons, 60 ballons ou 36 ballons.

Difficultés des élèves

Hormis les questions liées à la compréhension de l'énoncé (vocabulaire), les principales difficultés rencontrées par les élèves sont liées à la nécessité de trouver un point de comparaison (multiple commun).
Certains élèves pensent que puisqu'il s'agit de mathématiques il convient essentiellement de proposer des « calculs » avec les nombres à disposition.

Apprentissages des élèves

Les élèves entraînent la représentation d'un problème. Ils apprennent à comparer des nombres en relation avec d'autres dans des rapports de proportionnalité (ici des prix par quantité à partir d'une quantité commune ou éventuellement d'un prix commun).

Limites et points d'attention

- Inviter les élèves à résoudre le problème en vue de l'achat d'un grand nombre de ballons, pour éviter la recherche du prix d'un seul ballon.
- Laisser aux élèves du temps pour chercher à résoudre le problème. Il est normal de ne pas trouver tout de suite la réponse.
- Proposer aux élèves de chercher le prix de 24 ballons, c'est déjà résoudre une partie du problème et limiter leur construction d'une représentation du problème. Il convient donc de ne fournir cette piste que si les élèves sont réellement bloqués. Idéalement ce que devraient trouver les élèves c'est la nécessité de comparer les prix pour un nombre équivalent de ballons.

Suite, prolongements

A la suite du travail sur cette leçon, le groupe LS a entrepris un nouveau cycle sur la résolution de problème avec notamment l'intention de mieux travailler les aides que l'enseignant peut proposer aux élèves pour favoriser la représentation du problème sans pour autant le résoudre à leur place. Ce travail est disponible sur le site www.hepl.ch/3LS .
C'est notamment dans la direction du travail sur la résolution de problème et sur la représentation des problèmes que cette tâche pourra être prolongée.
Pour ce qui est du sujet mathématique, d'autres problèmes liés à des situations de proportionnalités pourront être proposés (par exemple *Chez le fleuriste*, *Dites-le avec des fleurs*)

Commentaires (développement de la fiche prof)

Contenu mathématique

La notion au cœur de ce problème est celle de proportionnalité. En fait il s'agit de comparer les prix unitaires par ballon des trois emballages, autrement dit le facteur de proportionnalité de trois suites proportionnelles pour lesquelles la consigne donne un couple de valeurs. Le choix des variables numériques bloque le calcul de ce prix unitaire chez des élèves qui ne maîtrisent pas encore les nombres rationnels. Il est alors nécessaire de développer d'autres stratégies pour pouvoir déterminer quel emballage est le plus avantageux.

La représentation de ces notions de *comparaison*, de *plus avantageux*, de *moins cher*… est difficile et les élèves doivent être amenés à trouver un point de comparaison. Celui-ci peut être :

- le prix pour un ballon (difficilement accessible de par le choix des variables numériques)
- une quantité commune de ballons (un multiple commun, c'est cette stratégie qui est ici favorisée par le choix des valeurs numériques)
- un prix commun (un multiple commun, cette stratégie est possible, mais plus difficilement accessible par ces élèves)

Les éléments essentiels du problème sont donc liés à des notions mathématiques en cours de construction :

- une comparaison nécessite un élément comparable, un « point » commun, par exemple le prix pour une même quantité de ballons
- il s'agit d'une situation de proportionnalité, donc d'une situation multiplicative et ici cette quantité commune est un multiple commun des quantités initiales

Dans cette leçon, l'objectif d'apprentissage porte plus sur la représentation du problème et sa modélisation en terme de multiple commun que sur un apprentissage détaillé de la proportionnalité.

Construction de la leçon

Les modifications apportées à la fiche « En Promotion » sont :

- La consigne a été modifiée pour éviter d'inviter les élèves à la recherche du prix d'un seul ballon (passage par l'unité non pertinent et pourtant induit par la consigne d'origine) Ainsi *Quel type d'emballage est-il le plus avantageux* a remplacé la consigne originale *dans quel emballage le ballon est-il le moins cher?*).
- Le terme « PRÉFÉRÉ » a été supprimé sur le dessin parce qu'il est potentiellement porteur de malentendus.
- Le prix du paquet de 12 ballons a été augmenté pour éviter la possible résolution par approximation ou l'idée reçue que le paquet qui contient le plus de ballons est automatiquement le moins cher.
- La police de caractère des prix et du nombre de ballon a été uniformisée pour éviter d'attirer l'attention des élèves sur le prix qui était écrit en gras.

La résolution de problèmes dans l'enseignement…

La résolution de problèmes est une activité typique en mathématique.

Dans l'enseignement, elle peut être considérée de trois manières selon ses buts. On peut enseigner **pour** résoudre des problèmes (les notions mathématiques enseignées ont alors pour finalité de résoudre des problèmes), on peut enseigner **à** résoudre de problèmes (notamment par l'apprentissage de stratégies de résolution de problème, par exemples inspirées de Polya, 1965), et on peut enseigner **par** le problème. L'approche choisie par le PER est d'abord d'enseigner **par** le problème, mais cela implique aussi d'enseigner **à** résoudre des problèmes, sans toutefois donner des "trucs", efficaces seulement dans certaines situations particulières mais qui pourraient empêcher les élèves d'entrer dans le problème et d'apprendre **par** la résolution du problème.

Nous savons que c'est au travers de l'activité de résolution de problème que l'élève construit des connaissances mathématiques. La difficulté principale se situe au niveau de la traduction du problème exprimé dans un langage non scientifique en une expression mathématique de celui-ci. L'élève doit donc commencer par se représenter le problème et « inventer » une procédure pour le résoudre. Il ne s'agit donc pas seulement de « deviner la bonne opération », mais bien de la choisir selon sa compréhension du problème. Dans le monde des mathématiciens, un problème

peut occuper un scientifique des années durant (parfois toute une vie). Ainsi, résoudre un problème n'est pas trouver instantanément la procédure à appliquer, mais bien tâtonner, chercher, essayer, vérifier, essayer encore, tester, vérifier encore, etc. Or, de nombreux élèves pensent que si la solution ne leur « saute » pas aux yeux, ils sont incapables de résoudre le problème. Ces élèves n'ont pas construit la posture attendue par les mathématiques et se décourageront rapidement. L'enseignant-e a donc la difficile mission d'initier les élèves au goût de cette recherche, à la persévérance et à la construction d'une conception qui intègre le fait de ne pas trouver tout de suite la réponse comme faisant partie intégrante de l'activité de résolution de problèmes.
Dans cette perspective, aider les élèves dans la résolution de problème relève d'un guidage affectif (aide à la persévérance, sentiment d'auto-efficacité), cognitif (poser des questions qui invitent l'élève à chercher, tâtonner, vérifier…) et métacognitif (favoriser la prise de conscience des processus mis en œuvre).

Références

- Coppé, S., & Houdement, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N, 69*, 53-62.
- Coppé, S., & Houdement, C. (2009). *Résolution de problèmes a l'école primaire française: perspectives curriculaire et didactique.* Paper presented at the Colloque de la COPIRELEM.
- Dumas, J.-P., & Jaquet, F. (2001). Les tentations de la proportionnalité. *Math-Ecole*, 198, 33-42.
- Houdement, C. (1999). Le choix des problèmes pour la "résolution de problèmes". *Grand N, 63*, 59-76.
- Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N, 71*, 7-23.
- Julo, J. (2000). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? In COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXVIIe Colloque Inter-IREM de Chamonix* (pp. 9-28). Grenoble: IREM de Grenoble.
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N, 69*.
- Peltier, M.-L., Briand, J., Ngono, B. & Vergnes, D. (2006). *Euromaths, CM1*. Paris: Hatier.
- Polya, G. (1945/1965). *Comment résoudre un problème* (C. Mesnage, trad.). Paris: Dunod.
- Van De Walle, J. A., Karp, K., Bay-Williams, J. M., Wray, J. A. & Rigelman, N. R. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Harlow: Pearson.

Annexes

1. Tâche de départ : En Promotion, Mathématiques 4P (6H), COROME
2. Fiche élève : Promotion
3. Prolongement : une autre promotion

En promotion

En promotion

Dans quel emballage le ballon est-il le moins cher ?
Justifie ta réponse.

Promotion

Je veux acheter beaucoup de ballons pour mon anniversaire.
Quel type d'emballage est le plus avantageux?

Justifie ta réponse.

Une autre promotion

Une autre sorte de ballons est proposée dans les emballages suivants :

- 10 ballons pour 6.-
- 15 ballons pour 8.-
- 20 ballons pour 12.-

Parmi ces trois types d'emballage, lequel est le plus avantageux?