Place de jeux

Degrés	6H	Sujet mathématiques	Résolution de problèmes additifs "basiques"
Plan de leçon réalisé par André Fivaz, Annie Eternod, Émilie Baud, Nathalie Rod, Olivier Lovis, (EP Floréal, Lausanne), Alexandra Weber (EP Floréal) et Stéphane Clivaz (HEP Vaud), facilitateurs.			

Table des matières

Plan d'Études Romand

La leçon est organisée autour de la résolution de problèmes additifs « basiques ». Il s'agit de favoriser chez les élèves une bonne représentation de la situation évoquée par un énoncé verbal et de lier cette représentation à une écriture arithmétique. Ces problèmes sont basiques au sens où ils ne comprennent que deux données et une troisième valeur doit être déterminée.

MSN 23 — Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs…

- …en traduisant les situations en écritures additive, soustractive, multiplicative ou divisive
- …en sélectionnant les données numériques à utiliser

ÉLÉMENTS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

- tri et organisation des informations (liste, tableau, schéma, croquis,…)
- mise en œuvre d'une démarche de résolution
- ajustement d'essais successifs
- pose d'une conjecture, puis validation ou réfutation
- déduction d'une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- réduction temporaire de la complexité d'un problème
- vérification, puis communication d'une démarche et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats
- acceptation ou refus d'un résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur, la connaissance des opérations ou la confrontation au réel
- traduction des données d'un problème en opérations arithmétiques : additions, soustractions […]

- résolution de problèmes additifs et soustractifs (EEE, ECE, ETE[1])

INDICATION PÉDAGOGIQUE

Proposer des problèmes variés permettant aux élèves de se construire des représentations complètes des différents types de situations à résoudre

MSN 25 — Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques…

- … en imaginant et en utilisant des représentations visuelles (codes, schémas, graphiques, tableaux,…)
- … en identifiant des invariants d'une situation
- … en triant et organisant des données
- … en communiquant ses résultats et ses interprétations

[1] Les définitions de ces types de problèmes seront données en p. 5 et en annexe 5.
Les problèmes TTT figurent au PER dès la 7H. Ils ont pourtant été traités dans cette leçon pour des raisons décrites en p. 6.

Place de jeux (fiche prof)

Le plan de leçon proposé ici développe une leçon construite autour de problèmes additifs « basiques » afin de contribuer à construire chez les élèves une mémoire de problèmes. Cette *fiche prof* présente les éléments essentiels permettant de donner cette leçon. Les réflexions du groupe sont développées dans la partie *commentaires* ci-dessous.
La leçon est planifiée pour une durée de 45 à 60 minutes.

Contenu mathématique

- Résolution de problème
- Problèmes additifs

Matériel

- Énoncé des problèmes, *Place de jeux*, tiré du manuel de 6H, *Mathématiques 4ème année,* pp. 60-63, ou mieux photocopiés (annexe 1), en insérant un espace suffisant pour la résolution.
- Si ces problèmes ont déjà été traités, il est possible d'utiliser une version modifiée (annexe 2)

Gestion

Ordre des problèmes

- 5 (ou A en version modifiée)
- 7 (B)
- 12 (C)
- 13 (D)
- En réserve : 2 (E) et 4 (F)

Travail par deux : env. 20 minutes

- Nous avons choisi de travailler avec des duos homogènes
- Une seule série de feuilles par duo afin de promouvoir la collaboration et la verbalisation du raisonnement dans chaque groupe
- Relances éventuelles pour les élèves en difficulté : voir annexe 4
- Pour les élèves qui sont bloqués, proposer le 2 (E) et le 4 (F) à la place du 7 (B), 12 (C) ou 13 (D)
- 5 minutes avant la mise en commun
    - L'enseignant·e choisit le problème sur lequel portera la mise en commun : un problème qui a posé difficulté à plusieurs élèves
    - L'enseignant·e demande à tous les élèves de faire ce problème, même s'ils n'en sont pas encore là.

Mise en commun :

- Questions posées
    - Comment avez-vous résolu ce problème ?
    - Qui a fait autrement/pareil ?
- Prendre note des propositions. Sélectionner au moins une démarche correcte et une démarche erronée.
- Susciter le débat afin de permettre la validation (ou l'invalidation) des différentes propositions.
- Questionner les élèves quant au lien entre plusieurs éventuelles procédures donnant le même résultat. Mettre en évidence ces liens.
- L'enseignant·e conclut la mise en commun en verbalisant les stratégies utilisées.

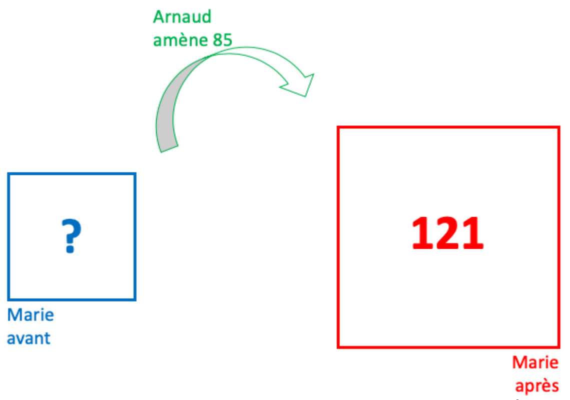
Démarches possibles des élèves

Par exemple pour le problème 5 :

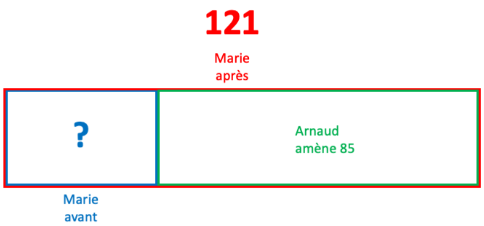
Marie a des bandes dessinées de toutes sortes dans sa bibliothèque. Arnaud lui en apporte un carton de 85, ce qui lui fait maintenant 121 bandes dessinées en tout.

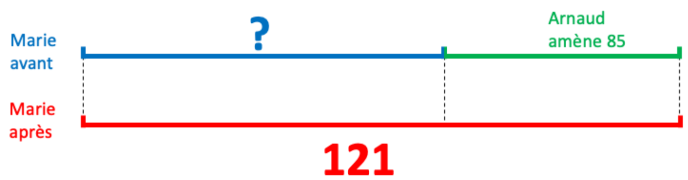
- Écrire une addition lacunaire correspondant à l'énoncé : … +85=121

- Trouver la solution en transformant l'addition lacunaire en soustraction : 121–85=… et en effectuant la soustraction par calcul réfléchi ou à l'aide d'un algorithme en colonnes
    - Trouver directement la solution de l'addition lacunaire par calcul réfléchi.
- Traduire l'énoncé en une soustraction : 121–85=… et effectuer la soustraction, par calcul réfléchi ou par un algorithme
  Remarquons que cette soustraction ne correspond pas directement à l'énoncé et qu'il est donc nécessaire, soit de transformer l'addition lacunaire … +85=121 en soustraction (comme ci-dessus), soit de transformer le récit pour comprendre que si on enlève les 85 BD amenées par Arnaud au total des BD, on a le nombre de BD que possédait Marie avant l'arrivée d'Arnaud ! Ce passage peut être facilité par une représentation schématique…
- Faire une représentation schématique de la situation
    - Dessin figuratif
    - Dessin non figuratif avec les nombres de l'énoncé, éventuellement en utilisant des jetons
    - Schéma représentant l'action du type de celui proposé en annexe 3



    - Schéma en barre ou en segment (voir annexe 3 et annexe 5)





    - Résoudre le problème à l'aide de cette représentation
        - en comptant directement les objets
        - en effectuant directement et mentalement l'opération
        - en écrivant l'opération (voir ci-dessus)

Difficultés des élèves

- Les difficultés à se représenter la situation. Ces difficultés ne proviennent pas uniquement d'une mauvaise compréhension de la consigne et /ou de l'énoncé et à un manque de vocabulaire. Souvent, ils n'arrivent pas à se représenter le problème, car ils ne parviennent pas à trier les informations et à tirer les éléments essentiels d'un énoncé.
- Difficultés à effectuer les opérations.

Apprentissages des élèves

La pratique régulière de la résolution de problèmes basiques dans lesquels l'élève est en situation de réussite (il parvient à trouver la solution par lui-même), mais dans lesquels il doit fournir un effort afin de se représenter le problème, permet d'entraîner (sans driller) la représentation de ces problèmes. Elle permet aussi d'habituer l'élève à utiliser des outils (schéma, visualisation de la situation, jeu de rôle) pouvant l'aider à cette représentation. Elle contribue également à la constitution progressive d'une « mémoire de problèmes » (Houdement, 2017).

Limites et points d'attention

L'apprentissage de la résolution de problèmes et la constitution d'une mémoire de problèmes s'effectuent sur un temps long. Comme décrit dans les commentaires, nous n'avons pas pu percevoir d'évolution, à l'échelle de la leçon, dans la compétence des élèves à résoudre des problèmes ou à utiliser des représentations schématiques. Nous avons même souvent eu l'impression de n'aider que les élèves qui n'avaient pas vraiment besoin d'aide. La manière d'aider les élèves les plus en difficulté reste encore à travailler.

Suite, prolongements

- Travail sur les autres problèmes de *Place de jeux*
- Travail sur d'autres problèmes additifs basiques
- Travail sur des problèmes basiques multiplicatifs et sur des problèmes basiques mêlant des situations additives et des situations multiplicatives
- Travail sur des problèmes complexes (voir le plan de leçon *Les sapins* ou *Promotion*)

Commentaires (développement de la fiche prof)

Apprendre à résoudre des problèmes

Le travail autour de *Place de jeux* visait le développement de leçon(s) permettant l'apprentissage de la résolution de problème par les élèves. Les éléments que le groupe souhaite retenir et transmettre sont parfois des constatations, souvent des doutes. Ils témoignent surtout de la prise de conscience du rôle essentiel de cet apprentissage et de la difficulté à le travailler avec les élèves.

C'est en résolvant…

Si la résolution de problème peut difficilement « se driller », la pratique de la résolution de problème elle-même est nécessaire au développement de la capacité à résoudre des problèmes. Dans la même ligne que Julo (2002) et Houdement (2017), le groupe a souhaité travailler sur des « problèmes basiques » afin de permettre une pratique durant laquelle

- les élèves sont en situation de réussite
- ils peuvent constituer une mémoire des problèmes résolus
- ils peuvent observer plusieurs stratégies de résolution et procéder en partie par mimétisme pour résoudre certains problèmes.

Cette partie de l'apprentissage de la résolution de problème se développe essentiellement lors des phases de mise en commun sur lesquelles nous avons principalement travaillé (voir ci-dessous). Ce mimétisme n'est évidemment pas suffisant pour un réel apprentissage de la résolution de problèmes, mais nous avons constaté qu'il peut constituer un point de départ pour des élèves en difficulté lors de la résolution de problèmes.

Solution et résolution

La focalisation sur les manières de résoudre un problème, plus que sur la solution de problème lui-même n'est pas aisée. Il est difficile de motiver les élèves à ne pas se contenter d'une réponse et de les conduire à bien verbaliser la manière dont ils ont résolu le problème, à être capables d'expliquer et de justifier leur stratégie, voire à proposer plusieurs méthodes de résolution différentes. Plusieurs éléments permettent de motiver cette demande : la nécessité de vérifier le résultat (voir validation ci-dessous), la demande de trouver plusieurs manières différentes de résoudre le problème ou encore la nécessité de convaincre un camarade qu'une solution est correcte (voir mise-en-commun ci-dessous). Le travail sur la schématisation des problèmes va d'ailleurs dans cette direction.

Les schémas

Nous sommes partis de l'idée que le fait de proposer aux élèves des schémas représentant les problèmes leur permettrait plus facilement de s'approprier les problèmes et de les résoudre. Nous avons essayé différentes modalités en classe :

- proposer aux élèves de dessiner des schémas sous une forme libre pour ensuite les présenter lors de la mise en commun
- dessiner les schémas complets devant les élèves pendant la mise en commun en les commentant
- proposer aux élèves des schémas à compléter pendant le moment de recherche ; ces schémas peuvent être utilisés selon leurs besoins.

Suite à ces expériences, nous nous sommes interrogés sur l'efficacité et l'utilité de la démarche. Nous constatons que ce sont davantage les élèves qui ont de la facilité qui parviennent à utiliser ces schémas spontanément à bon escient, alors que cela ne semble pas très aidant pour les élèves en difficulté qui n'arrivent pas à dessiner un schéma sans aide. Parfois, le fait de proposer des schémas peut même déstabiliser les élèves qui avaient compris et avaient résolu le problème rapidement.

Toutefois, suite au travail mené en classe par certain·e·s enseignant·e·s du groupe durant plusieurs semaines, voire plusieurs mois, en utilisant certains schémas ou en en encourageant l'utilisation, nous pouvons constater que quelques élèves tentent de plus en plus de représenter les problèmes sous forme de dessins ou schémas, parfois de manière adéquate, mais aussi parfois de manière peu efficiente (par exemple en dessinant tous les détails inutiles). Nous pensons que ce n'est qu'en travaillant à moyen ou long terme avec des schémas que les élèves pourront se les approprier réellement. L'évolution observée chez certains élèves peut nous faire supposer que même les élèves en difficulté pourraient utiliser cet outil après avoir été accompagnés pendant une période plus ou moins longue. Par ailleurs, le fait que des schémas, en particulier des schémas en barre (voir annexes 3 et 5) soient utilisés avec succès dès les premières années de l'école primaire dans les manuels et les classes de plusieurs pays (Japon, Chine, Singapour, USA, …) nous incite à souhaiter continuer à explorer cette piste.

Nous avons aussi évoqué le fait que les enseignant·e·s ont tendance à ne proposer que le type de schéma qui leur correspond ; il nous semble important de penser à présenter différents types de schémas aux élèves afin qu'ils choisissent ceux qui leur conviennent le mieux.

Les aides (voir annexe 4)

Les difficultés rencontrées par les élèves pour se représenter la situation ne proviennent pas uniquement d'une mauvaise compréhension de la consigne et/ou de l'énoncé et à un manque de vocabulaire. Souvent, ils n'arrivent pas à se représenter le problème, car ils ne parviennent pas à trier les informations et à tirer les éléments essentiels d'un énoncé. Nous constatons parfois le même type de difficulté lors de la rédaction d'un résumé en français. Afin de soutenir les élèves en fonction de la difficulté rencontrée, nous avons pensé à différentes relances qui sont mentionnées dans le tableau.

Différentes catégories de problèmes

Les problèmes additifs sur lesquels nous avons travaillé sont souvent regroupés selon une classification attribuée à Vergnaud. Cette classification est reprise dans les manuels romands et dans le Plan d'Études Romand de la manière suivante :

- Type EEE (état, état, état) : deux états se composent pour donner un nouvel état.
  Exemple : Valentin a 12 billes, Séraphine en a 9. Ensemble, ils en ont 21.
- Type ETE (état, transformation, état) : une transformation d'un état initial en un état final.
  Exemple : Valentin a 12 billes. Il joue une partie contre Séraphine et en perd 7. Il lui en reste 5.
- Type ECE (état, comparaison, état) : une comparaison de deux mesures ou deux états.
  Exemple : Valentin a 12 billes, Séraphine en a 7 de moins que Valentin. Séraphine a donc 5 billes.
- Type TTT (transformation, transformation, transformation) : deux transformations se composent pour donner une transformation.
  Exemple : Séraphine a gagné 6 billes, puis elle en a perdu 9. En tout, elle en a perdu 3.

La formation initiale des enseignant·e·s primaires traite souvent de cette classification (voir annexe 4) et insiste sur le lien entre le type de problème et la difficulté de résolution pour les élèves. Cette classification se retrouve d'ailleurs aussi dans des problèmes basiques chinois proposés par Houdement (2017) et traduits en annexe 5. Pour ce qui concerne *Place de jeux*, les 12 problèmes peuvent être classés de la manière suivante.

1. Marie se rend chez son ami Arnaud avec 123 images et 165 billes ; elle avait plus d'images avant de venir, mais elle en a donné 47 à son frère. Combien Marie avait-elle d'images avant d'en donner à son frère ?	ETE ou[2] **E**T$^-$E
2. Marie et Arnaud comparent leurs collections de timbres. Arnaud a 305 timbres de moins que Marie ; il en a 208. Combien de timbres possède Marie ?	**E**C$^-$E
3. Ségolène a reçu une série de 34 timbres pour ses 13 ans ; elle en avait déjà 138. Elle les a tous apportés chez Arnaud. Combien Ségolène a-t-elle apporté de timbres ?	ET$^+$**E**
4. Marie a beaucoup de livres ; elle en a 89. Son ami Arnaud en a encore plus ; il en a 126. Quelle est la différence entre le nombre de livres de Marie et le nombre de livres d'Arnaud ?	E**C**$^+$E

[2] Parfois, pour indiquer plus précisément le type de problème additif dont il s'agit, on indique en gras la quantité inconnue. Les transformations et les comparaisons sont également suivie d'un signe + ou – selon qu'elles sont positives ou négatives.

5. Marie a des bandes dessinées de toutes sortes dans sa bibliothèque. Arnaud lui en apporte un carton de 85, ce qui lui fait maintenant 121 bandes dessinées en tout. Combien de bandes dessinées Marie avait-elle dans sa bibliothèque avant l'arrivée d'Arnaud ?	$\mathbf{E}T^{+}E$
6. Marie a 306 francs dans sa tirelire. Arnaud en a 149. En tout, ils possèdent 455 francs. Combien manque-t-il à Arnaud pour avoir autant d'argent que Marie dans sa tirelire ?	$E\mathbf{C}^{-}E$
7. Béatriz classe des photos dans 3 albums différents. Elle en a 391. Elle en prend 162 pour les montrer à une amie. Combien y a-t-il alors de photos en tout dans ses albums ?	$ET\mathbf{E}$
8. Elena a des photos de vedettes de cinéma des années soixante ; elle en a 87 de plus que sa cousine Laura. Laura en a 53. Combien de photos a Elena ?	$EC^{+}\mathbf{E}$
9. Véronique classe ses photos. Ses albums sont complets. Elle enlève 106 photos pour les montrer et en rajoute 38 nouvelles. Combien y a-t-il alors d'emplacements vides dans ses albums ?	$TT^{+}\mathbf{T}^{-}$
10. Dans une galerie de photos d'art, 228 photos à vendre sont exposées. Chaque photo coûte 250 francs. À la fin de l'exposition, 159 photos sont encore à vendre. Combien de photos ont été vendues ?	$E\mathbf{T}^{-}E$
11. Rodrigo et David possèdent ensemble 327 billes. Rodrigo en a 188. Ces billes sont de tailles différentes : 76 sont grandes, 94 petites, et les autres moyennes. Combien de billes possède David ? Combien y a-t-il de billes de taille moyenne ?	$EE\mathbf{E}$ ou $EC^{-}\mathbf{E}$
12. Vincent a joué deux parties de billes. Il a gagné des billes au cours de la première partie et en a perdu 12 au cours de la seconde. En tout, il a gagné 7 billes. Combien de billes Vincent a-t-il gagné à la première partie ?	$\mathbf{T}T^{-}T^{+}$
13. Théo a joué deux parties de billes. En tout, il a perdu 18 billes. Lors de la première partie, il en avait gagné 24. Que s'est-il passé au cours de la deuxième partie ?	$T^{+}T^{-}\mathbf{T}^{-}$
14. Les 327 billes de Rodrigo et David sont de 5 couleurs différentes : 83 sont rouges, certaines sont jaunes, 59 sont vertes, 94 sont bleues et 30 sont noires. Combien de billes sont jaunes ?	$EE\mathbf{E}$
15. Benjamin a joué deux parties de billes. À la première partie, il a perdu 28 billes puis il a joué une deuxième partie. En tout, Benjamin a perdu 42 billes. Que s'est-il passé à la deuxième partie ?	$T^{+}T^{-}\mathbf{T}^{-}$
16. Au cours d'une première partie, Daniela perd 37 billes, puis lors d'une deuxième partie, elle en gagne 59. Que s'est-il passé en tout ?	$T^{-}T^{+}\mathbf{T}^{+}$

Les problèmes traités par le groupe prenaient en compte cette classification afin de proposer aux élèves des situations variées permettant des niveaux de difficulté adaptés et des schématisations différentes selon les situations.
Dans cette classification, les problèmes de composition de transformation (TTT) jouent un rôle particulier pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ces problèmes sont beaucoup plus difficiles que les autres, car on travaille sur des transformations sans connaître aucune valeur d'état. Ces problèmes n'interviennent dans le PER qu'en 7H. Ils sont d'ailleurs souvent difficiles pour les enseignant·e·s eux-mêmes et peuvent entraîner une certaine déstabilisation, en particulier face à une classe. Ils ont été utilisés par le groupe à des fins de différenciation (voir ci-dessous).

Validation

La validation par l'élève (par opposition à une correction par l'enseignant·e) de la solution d'un problème joue un rôle essentiel dans l'apprentissage. Si un élève résout un problème en choisissant une opération un peu au hasard, le fait de lui indiquer que le résultat est incorrect va l'inciter à choisir une autre opération sans comprendre la raison du choix de cette opération. Il procédera ensuite de la même manière pour les problèmes suivants, choisissant une opération au hasard. À l'inverse, le fait de devoir vérifier lui-même sa propre solution va le conduire à mettre en doute et à justifier sa résolution du problème par des arguments liés au problème lui-même. L'élève va ainsi devoir justifier le choix des opérations par sa représentation du problème. Il va travailler l'adéquation entre le problème et la représentation qu'il se fait du problème et l'adéquation entre cette représentation et le choix des opérations. Nous avons constaté que cette démarche de validation pouvait parfois devenir une démarche de résolution, certains élèves choisissant une opération, obtenant un résultat, tentant de vérifier ce résultat en relisant le problème, se rendant compte que « ça ne marche pas » et choisissant une autre opération…

Par exemple, pour le problème 5 que l'élève résout par l'opération 121+85, l'élève dit : « Marie avait 206 BD. Arnaud lui en apporte 85, elle en a donc 206+85, ce qui fait 291. Zut, ça ne marche pas. Il faut donc faire 121–85… ».
Ce type de démarche offre l'avantage de contribuer à construire une bonne représentation du problème (il faut « enlever » les livres qu'Arnaud apporte pour savoir ce qu'avait Marie avant). Elle permet aussi la prise de conscience que la vérification de la solution d'un problème ne se borne pas à vérifier que les opérations ont été effectuées correctement.
De plus, pour les problèmes TTT, nous avons constaté que le fait de valider les solutions des problèmes précédents les incitait à « oser » choisir un nombre de départ et que le fait de pouvoir choisir un nombre (et que la réponse finale ne dépend pas du choix de ce nombre ») a été un déclic chez plusieurs élèves.
Signalons encore que le travail sur la validation permet aux élèves de se forger une vision des mathématiques selon laquelle les arguments et la justification jouent un rôle essentiel en maths. Cette vision correspond à leur travail mathématique futur et constitue donc un apprentissage essentiel à long terme.
Ce travail de validation est présent lors du travail individuel ou en petit groupe. Il se développe aussi durant les phases de débat et de mise en commun.

Mise en commun

L'étape de la mise en commun est indispensable. Nous avons attaché une grande importance à ces moments. En effet, c'est notamment grâce et pendant les mises en commun que les élèves peuvent développer leurs compétences pour résoudre des problèmes. Suite aux leçons données, nous avons pris conscience qu'il est nécessaire de prendre le temps de mener une mise en commun complète, du début à la fin, qui permette réellement aux élèves de confronter leurs différentes stratégies et d'en débattre. Nous en avons conclu que si nous souhaitons mener des mises en commun qui permettent vraiment aux élèves d'apprendre, il est indispensable d'y consacrer le temps nécessaire et de limiter le nombre d'activités qui seront effectuées. Il est alors nécessaire de faire un choix parmi toutes les activités qui existent dans les manuels officiels. C'est lors de ces moments que les élèves peuvent exposer leurs stratégies de résolution, prendre connaissance de celles de leurs camarades et, grâce au débat, valider ou invalider les résultats. La participation à des débats sera développée tout au long de l'année scolaire non seulement en maths, mais aussi français, sciences ou SHS, même si les règles ne sont pas les mêmes selon les sujets discutés. Il s'agit là aussi d'un travail à moyen ou long terme que les élèves développeront tout au long des années scolaires.

Différenciation

Pour progresser quant à la résolution de problème, il est nécessaire pour un élève d'être en situation de réussite (l'élève peut résoudre le problème par lui-même), mais aussi en situation de devoir fournir un effort pour cette résolution.

> Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but.
> Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire.
> C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. (Brun, 1990, p. 2)

Notre souci était donc de proposer des problèmes adaptés aux élèves qui ont de la facilité pour leur permettre d'être véritablement en position de recherche tout en proposant des problèmes adaptés aux autres élèves afin qu'ils puissent les résoudre par eux-mêmes et se retrouver en situation de réussite. C'est la raison pour laquelle nous avons différencié le niveau de difficulté des problèmes proposés selon notre observation de chaque groupe d'élèves au cours de la leçon. Pour la phase de mise en commun, nous avons choisi des problèmes sur lesquels nous pensions pouvoir animer un débat.
Dans le tableau des aides (annexe 4), nous proposons différentes pistes de différenciation qui peuvent être utilisées comme relance pendant le travail de recherche des élèves.
Comme mentionné dans ce tableau, des schémas peuvent être proposés à des élèves qui ont des difficultés à se représenter le problème. Afin d'adapter au maximum les interventions de l'enseignant, nous proposons différents types de schémas. Ces schémas peuvent être utilisés également pendant la mise en commun. Il est aussi possible de mener de temps en temps des

mises en commun partielles, par exemple avec un petit groupe d'élèves, pour ensuite rapporter le travail qui a été effectué au grand groupe ; cela permet de choisir sur quel problème on ciblera la mise en commun.

Références

Baetschmann, K., Balegno, M., Baud, E., Clerc, A., Clivaz, S., Florey, V. et al. (2015). Résolution de problèmes: Promotion. http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/plan-lecon-6h-Promotion-v06-labo-3ls-2015-hep-vaud.pdf

Baud, E., Clivaz, S., Cordey, N., Eternod, A., Fivaz, A., Granget, A. et al. (2018). Les sapins. http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/plan-lecon-56h-lessapins-labo-3ls-2018-hep-vaud.pdf

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques: bilan et perspectives. Math École, 141, 2-15.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999). *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Sun, X. H. & Bartolini Bussi, M. G. (2018). Language and Cultural Issues in the Teaching and Learning of WNA. In M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (Eds.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades: The 23rd ICMI Study* (pp. 35-70). Cham: Springer International Publishing.

Annexes

1. Place de jeux
2. Problèmes modifiés
3. Schémas proposés
4. Tableau des aides
5. Typologie des problèmes additifs
6. Les canards

Place de jeu, problème 2

Marie et Arnaud comparent leurs collections de timbres. Arnaud a 305 timbres de moins que Marie ; il en a 208. Combien de timbres possède Marie ?

Place de jeu, problème 4

Marie a beaucoup de livres ; elle en a 89. Son ami Arnaud en a encore plus ; il en a 126. Quelle est la différence entre le nombre de livres de Marie et le nombre de livres d'Arnaud ?

Place de jeu, problème 5

Marie a des bandes dessinées de toutes sortes dans sa bibliothèque. Arnaud lui en apporte un carton de 85, ce qui lui fait maintenant 121 bandes dessinées en tout.
Combien de bandes dessinées Marie avait-elle dans sa bibliothèque avant l'arrivée d'Arnaud ?

Place de jeu, problème 7

Béatriz classe des photos dans 3 albums différents. Elle en a 391. Elle en prend 162 pour les montrer à une amie. Combien y a-t-il alors de photos dans ses 3 albums ?

Place de jeu, problème 12

Vincent a joué deux parties de billes. Il a gagné des billes au cours de la première partie et en a perdu 12 au cours de la seconde. En tout, il a gagné 7 billes. Combien de billes Vincent a-t-il gagné à la première partie ?

Place de jeu, problème 13

Théo a joué deux parties de billes. En tout, il a perdu 18 billes. Lors de la première partie, il en avait gagné 24. Que s'est-il passé au cours de la deuxième partie ?

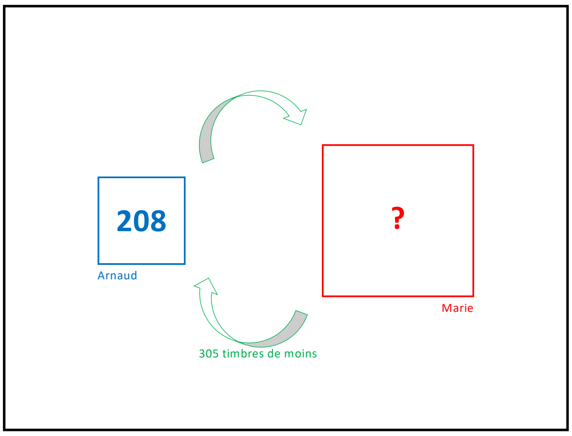
2 Problèmes modifiés

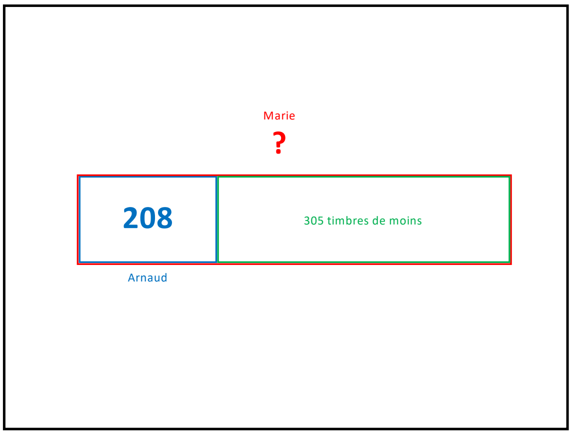
Place de jeu	Place de jeux bis
2. Marie et Arnaud comparent leurs collections de timbres. Arnaud a 305 timbres de moins que Marie ; il en a 208. Combien de timbres possède Marie ?	E. Un directeur doit comparer le nombre d'élèves de deux écoles. Dans l'école de Marcory, il y a 436 élèves de moins que dans celle de Bachoruz. Il y a 398 élèves à Marcory. Combien y a-t-il d'élèves dans l'école de Bachoruz ?
4. Marie a beaucoup de livres ; elle en a 89. Son ami Arnaud en a encore plus ; il en a 126. Quelle est la différence entre le nombre de livres de Marie et le nombre de livres d'Arnaud ?	F. Dans notre classe, il y a un certain nombre de CD en langues étrangères. Il y en a 59. La classe de 5P en a encore plus, elle en a 68. Quelle est la différence entre le nombre de CD de notre classe et le nombre de CD de la 5P ?
5. Marie a des bandes dessinées de toutes sortes dans sa bibliothèque. Arnaud lui en apporte un carton de 85, ce qui lui fait maintenant 121 bandes dessinées en tout. Combien de bandes dessinées Marie avait-elle dans sa bibliothèque avant l'arrivée d'Arnaud ?	A. L'école de Marcory accueille de nouveaux élèves cette année. Il y a 37 nouveaux élèves, ce qui fait 412 élèves en tout. Combien y avait-t-il d'élèves avant l'arrivée de ces nouveaux élèves ?
7. Béatriz classe des photos dans 3 albums différents. Elle en a 391. Elle en prend 162 pour les montrer à une amie. Combien y a-t-il alors de photos ~~en tout~~ dans ses albums ?	B. Il y a 137 élèves dans l'école de Bachoruz. Ils sont répartis dans 7 classes. Ce mercredi matin, 56 élèves participent à une animation théâtre en ville pendant que les autres restent à l'école. Combien d'élèves restent à l'école ?
12. Vincent a joué deux parties de billes. Il a gagné des billes au cours de la première partie et en a perdu 12 au cours de la seconde. En tout, il a gagné 7 billes. Combien de billes Vincent a-t-il gagné à la première partie ?	C. Julien a de l'argent dans sa tirelire. Il reçoit de l'argent de sa maman pour son anniversaire et, le lendemain, il dépense 25 francs pour acheter un ballon de foot. Actuellement, il a 12 francs de plus dans sa tirelire qu'avant son anniversaire. Combien Julien avait-il reçu de sa maman.
13. Théo a joué deux parties de billes. En tout, il a perdu 18 billes. Lors de la première partie, il en avait gagné 24. Que s'est-il passé au cours de la deuxième partie ?	D. Noa joue à un jeu vidéo pour arriver à gagner plus de points. Mais, lors de cette partie en deux manches, il perd 26 points. Pourtant, lors de la première manche, il avait gagné 32 points. Que s'est-il passé lors de la deuxième manche ?

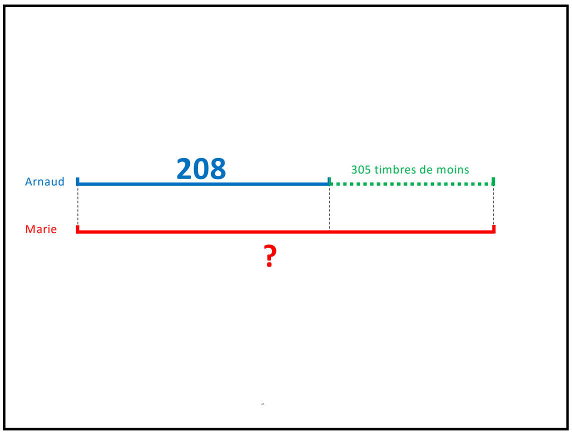
3 Schémas proposés

Place de jeu, problème 2

Marie et Arnaud comparent leurs collections de timbres. Arnaud a 305 timbres de moins que Marie ; il en a 208. Combien de timbres possède Marie ?

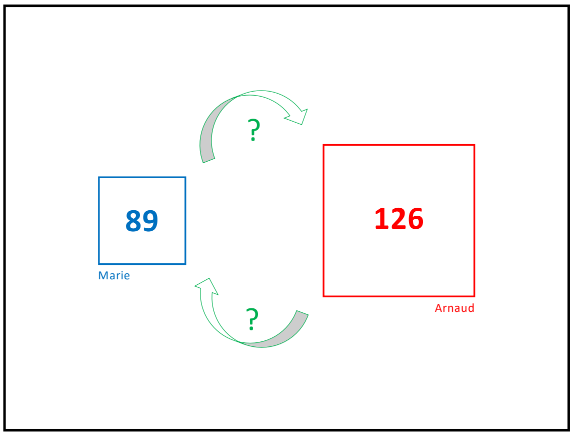


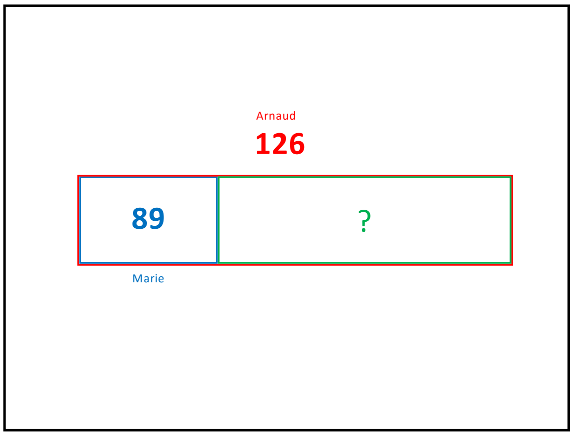


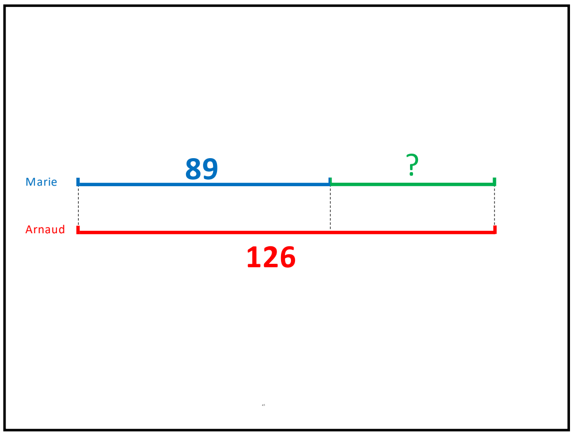


Place de jeu, problème 4

Marie a beaucoup de livres ; elle en a 89. Son ami Arnaud en a encore plus ; il en a 126. Quelle est la différence entre le nombre de livres de Marie et le nombre de livres d'Arnaud ?

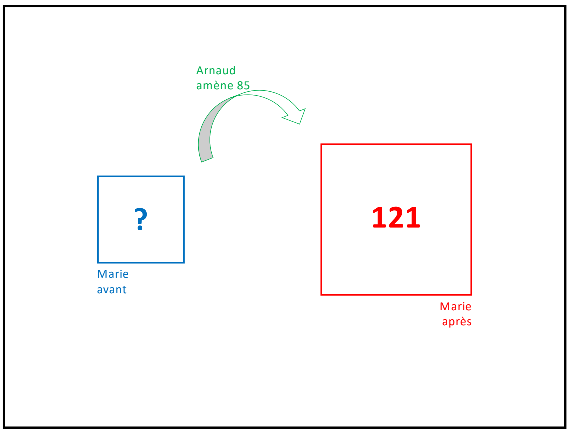


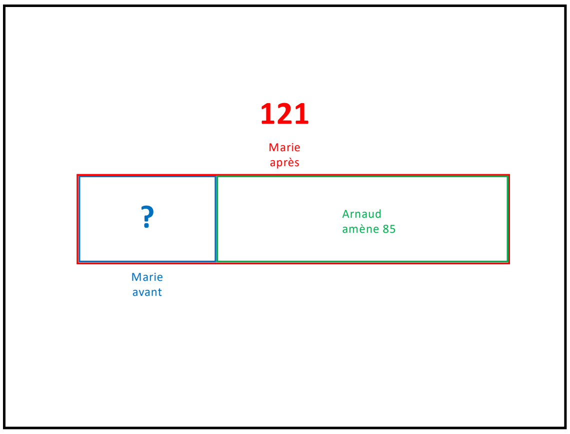


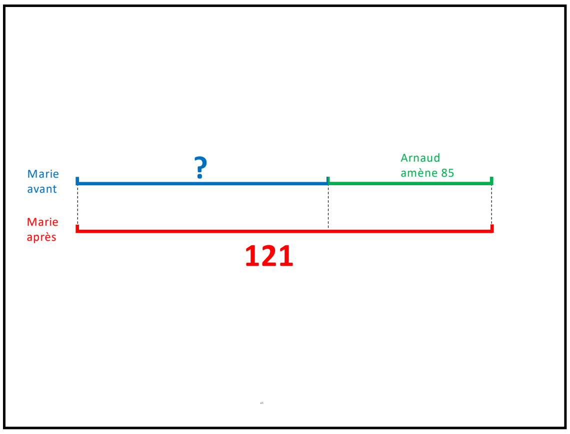


Place de jeu, problème 5

Marie a des bandes dessinées de toutes sortes dans sa bibliothèque. Arnaud lui en apporte un carton de 85, ce qui lui fait maintenant 121 bandes dessinées en tout. Combien de bandes dessinées Marie avait-elle dans sa bibliothèque avant l'arrivée d'Arnaud ?

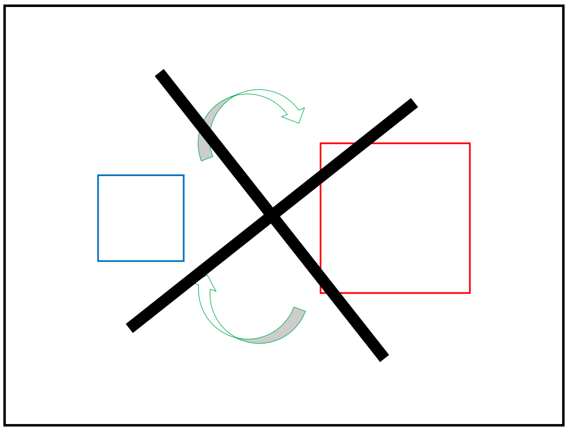


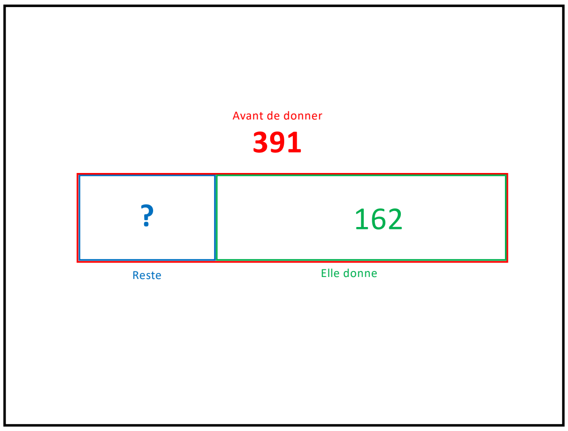


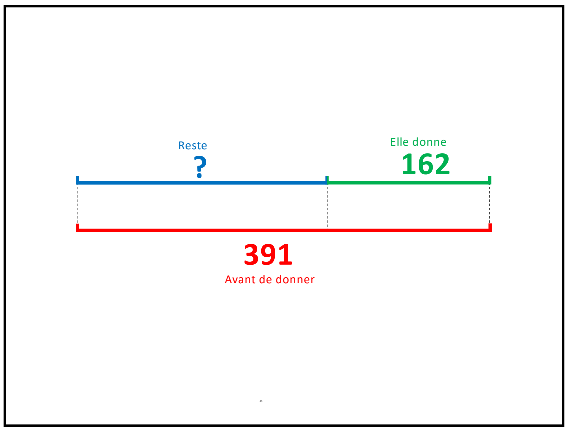


Place de jeu, problème 7

Béatriz classe des photos dans 3 albums différents. Elle en a 391. Elle en prend 162 pour les montrer à une amie. Combien y a-t-il alors de photos dans ses 3 albums ?

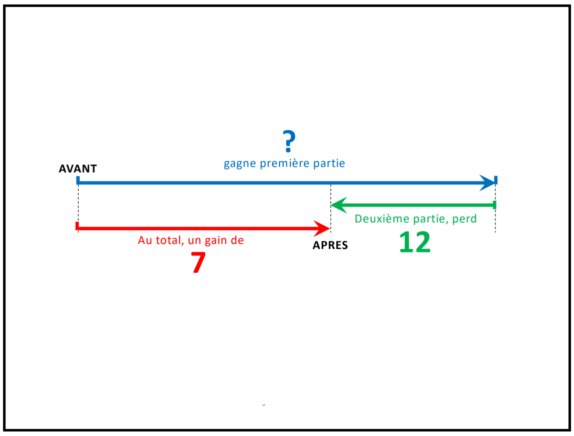


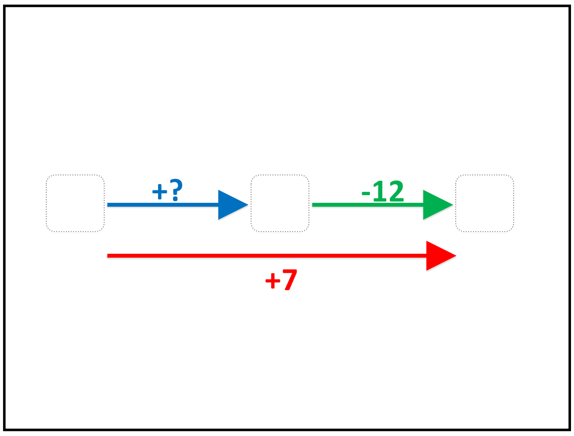




Place de jeu, problème 12

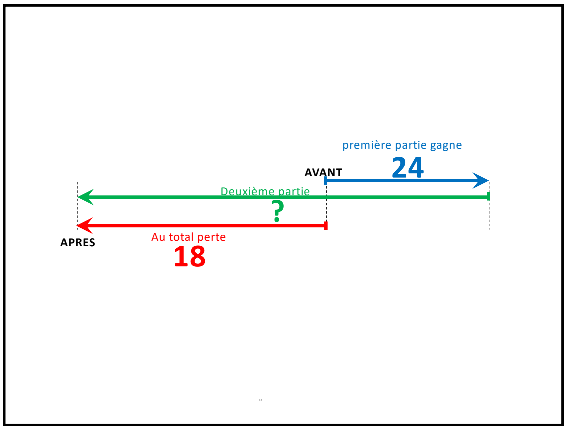
Vincent a joué deux parties de billes. Il a gagné des billes au cours de la première partie et en a perdu 12 au cours de la seconde. En tout, il a gagné 7 billes. Combien de billes Vincent a-t-il gagné à la première partie ?

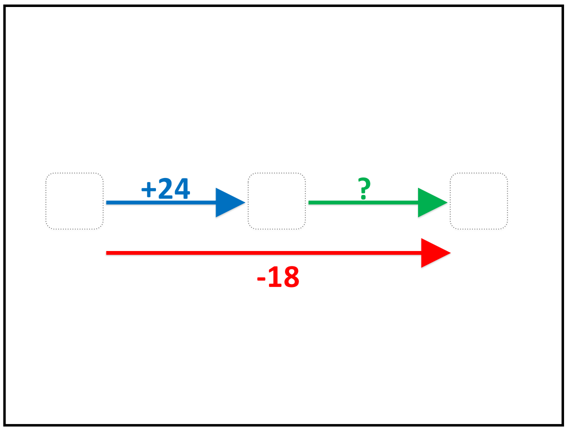




Place de jeu, problème 13

Théo a joué deux parties de billes. En tout, il a perdu 18 billes. Lors de la première partie, il en avait gagné 24. Que s'est-il passé au cours de la deuxième partie ?





4 Tableau des aides

Difficulté	aides, relances	Effets
Dans un problème impliquant une soustraction, ne savent pas quel nombre soustraire de quel nombre		Élèves font le plus grand moins le plus petit. Souvent ils s'en rendent compte par eux-mêmes. Reste à savoir s'ils ont ainsi construit une représentation du problème.
Hésitation sur la phrase réponse	Pourquoi ce calcul ?	Souvent, l'écriture de la phrase réponse est l'occasion d'une vérification • Résultat plausible • Relecture du problème en intégrant la réponse obtenue Certains élèves disent que c'est difficile, et parviennent à verbaliser où se trouve la difficulté, mais toujours sans parvenir à expliquer.
Ne savent pas si leur résultat est correct ou incorrect	Demande d'explication Validation par l'enseignant·e Demande de vérifier Suggère de relire l'histoire en intégrant la réponse, aide à le faire.	Aide certains élèves, mais en déstabilise beaucoup qui pensent que si l'enseignant·e les questionne, c'est que leur résultat est incorrect. Il est parfois nécessaire de les rassurer d'abord : *votre résultat est correct, mais j'aimerais comprendre comment vous l'avez obtenu.* Souvent, les élèves ne vérifient que le fait que leurs calculs soient corrects. Il est alors nécessaire qu'ils obtiennent une réponse incorrecte (mais en ayant effectué correctement les calculs) pour arriver à une vérification du problème. Cela peut alors être institutionnalisé avec les élèves.

Tendance à se précipiter très vite vers le calcul.	Tendance générale et contre laquelle il faut lutter sur le long terme. Des pistes sont à explorer, notamment celle des problèmes avec des nombres, mais sans calculs.	
Choisissent les opérations au hasard.	Dites une seule opération et dites pourquoi !	En présence de plus de deux nombres dans l'énoncé, ou si opérations additives ou multiplicatives possibles, les élèves essayent au hasard... La demande de choisir peut les forcer à réfléchir.
Difficulté à se représenter un problème EEE ou ETE (problèmes A, B, E ou F)	Proposer de faire un schéma, proposer un schéma Jouer la situation, éventuellement avec des objets réels, puis demander de schématiser. Même problème avec des nombres plus petits.	Aide dans certains cas, et pas dans d'autres. Il semblerait que cela puisse aider plusieurs élèves sur le long terme, mais qu'à court terme cela ne soit pas forcément le cas, voire que cela les embrouille. En fait, il faut déjà une part de compréhension pour pouvoir faire un schéma. Certains élèves proposent d'ailleurs un dessin représentatif de la situation (dessiner 121 bandes dessinées...) Aide certains élèves. Il semble d'ailleurs que cette aide permette un réel progrès chez au moins une élève. Aide certains élèves, mais pas d'autres, en difficulté.
Difficulté à se représenter un problème TTT (problèmes C ou D)	Propose de faire un schéma • flèche TTT • schéma gain-pertes Questions • Durant cette partie, est-ce qu'il gagne ou est-ce qu'il perd ?	Certains élèves le réinvestissent dans d'autres problèmes TTT. Pas testé. A aidé certains élèves.

Dans un problème TTT : il nous manque une information !	Suggère de choisir un nombre de départ. Suggère de choisir un autre nombre (plus simple, assez grand). Suggère d'essayer aussi avec un autre nombre. Imagine que tu as un très gros sac de billes. Tu ne sais même pas combien il y en a !	A permis à plusieurs élèves de résoudre le problème. A aidé plusieurs élèves. Permet aux élèves de sentir que ce choix n'a pas d'importance. Permet aux élèves de sentir que ce choix n'a pas d'importance.
Difficulté à se représenter un problème ECE, en particulier, problème avec le mot *différence.* (problème F)	Questions • Qui en a de plus ? • Combien il en a de plus ? • Pour lequel des deux on sait combien il en a ? • Qu'est-ce que représente ce nombre ?	A permis une bonne représentation du problème.
Pas de collaboration	Au cas où les élèves ne collaborent vraiment pas, donner une seconde feuille	
Élèves en difficulté	Faire avec eux des problèmes dans lesquels ils sont en situation de réussite. Faire avec eux étape par étape (mais veiller à poser des questions sans faire à leur place).	

5 Typologie des problèmes additifs (document distribué en formation BP, HEP VAUD)

Typologie des problèmes additifs
(Vergnaud, G., 1981)

Les problèmes additifs et soustractifs appartiennent à la même famille, au même champ conceptuel[1].

Pour les enfants de la scolarité primaire, il est possible de classer les problèmes additifs et soustractifs rencontrés en 4 catégories selon la typologie de Vergnaud (1981).

Remarque liminaire:

$\square$ *indique une mesure (nombre naturel)*

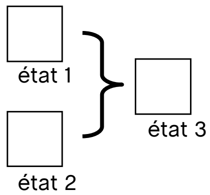
$\bigcirc$ *indique un opérateur, positif ou négatif (nombre relatif)*

$\}$ *indique une composition d'éléments de même nature*

$\rightarrow$ $\downarrow$ *indique une transformation ou une relation, c'est à dire la composition d'éléments de nature différente*

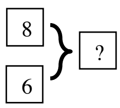
I. Problèmes de **composition d'états**

Deux mesures se composent pour donner une nouvelle mesure. L'aspect temporel n'entre pas en ligne de compte. Trois unités de grandeur sont en jeu, la troisième englobant les deux premières.

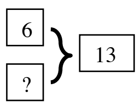


À partir de ce schéma, on peut formuler 2 types de questions. On sera amené à chercher soit la valeur totale, soit une partie du tout.

1) Paul compte ses billes. Il en a 8 en acier et 6 en verre. Combien de billes a-t-il en tout ?



2) Il y a 13 fleurs dans un vase. 6 sont des roses et les autres sont des marguerites. Combien y a-t-il de marguerites ?



[1] "*Un champ conceptuel peut être défini comme un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, procédures et de représentations symboliques en étroite connexion*." Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives. *Grand N, 38*, 21-40 (p. 32)

II. <u>Problèmes de **transformation d'états**</u>

Une transformation opère sur une mesure pour donner une nouvelle mesure. L'aspect temporel est important. Une seule unité de grandeur est en jeu.

$$\boxed{} \xrightarrow{\ t\ } \boxed{}$$

état initial état final

À partir de ce schéma, six types de questions différentes peuvent être formulées

- selon que l'on recherche l'état final, la transformation ou l'état initial
- selon que la transformation est positive ou négative.

1) Pierre a 5 billes. Il joue une partie avec des amis et gagne 7 billes. Combien a-t-il de billes maintenant ?

$$\boxed{5} \xrightarrow{+7} \boxed{?}$$

2) Avant une partie de billes, Alain avait 12 billes. Maintenant il en a 19. Que s'est-il passé ?

$$\boxed{12} \xrightarrow{+?} \boxed{19}$$

3) Anaïs a 9 billes après en avoir gagné 2 lors de la dernière partie. Combien en avait-elle avant ?

$$\boxed{?} \xrightarrow{+2} \boxed{9}$$

4) Laurence a 9 bonbons. Elle en donne 4 à sa petite sœur. Combien lui en reste-t-il ?

$$\boxed{9} \xrightarrow{-4} \boxed{?}$$

5) Maman avait 21 bonbons dans un sachet. Elle en a donné 1 à chacun de ses enfants. Il en reste 17. Combien a-t-elle d'enfants ?

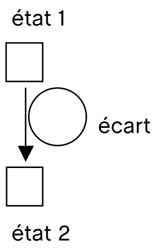
$$\boxed{21} \xrightarrow{-?} \boxed{17}$$

6) Le jour de son anniversaire, Coraline offre un bonbon à chacun de ses 16 camarades de classe. Il en reste 3 pour elle. Combien en avait-elle en arrivant à l'école ?

$$\boxed{?} \xrightarrow{-16} \boxed{3}$$

III. <u>Problèmes de **comparaison d'états**</u>

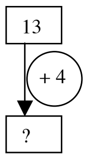
Comparaison de deux mesures. L'aspect temporel n'entre pas en ligne de compte. Une seule unité de grandeur est en jeu.



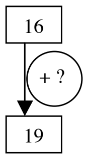
À partir de ce schéma, six types de questions différentes peuvent être formulées

- selon que l'on recherche l'état 2, l'écart ou l'état 1
- selon que l'écart est positif ou négatif.

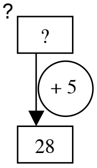
1) Caroline a 13 ans et sa sœur 4 ans de plus. Quel est l'âge de la sœur de Caroline ?



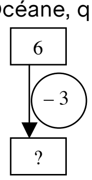
2) Bertrand a 16 billes. Annie en a 19. Combien Annie en a-t-elle de plus ?



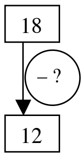
3) Avec sa collection de 28 cartes Panini, Aloïs a 5 cartes de plus que son frère. Combien en possède son frère ?



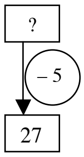
4) Till a 6 ans. Quel est l'âge d'Océane, qui a 3 ans de moins que son frère ?



5) Alain a mangé 12 biscuits, Vincent 18. Combien Alain en a-t-il mangé de moins ?

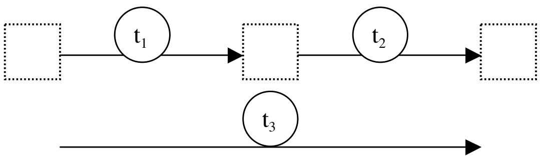


6) La cousine de Maëlle, avec ses 27 Barbies, en possède 5 de moins que Maëlle. Combien Maëlle a-t-elle de Barbies ?



IV. <u>Problèmes de **composition de transformations**</u>

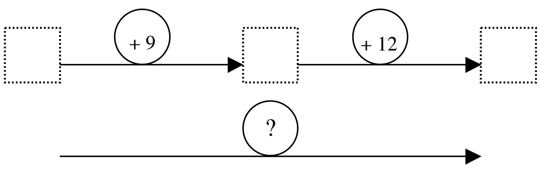
Deux transformations se composent pour donner une transformation. On ne connaît ni la valeur des états initiaux et finaux, ni celle des états intermédiaires. Une seule unité de grandeur est en jeu.



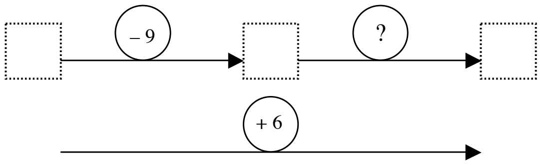
Une grande variété de problèmes peuvent être créés à partir de ce modèle de base. On peut demander de chercher t1, t2 ou t3, les transformations peuvent être positives ou négatives.
Il est possible d'imaginer 18 types de problèmes différents !

Deux exemples :

1) Le premier lancer de dés permet à Catherine d'avancer de 9 cases. Au second lancer, elle avance de 12 cases. Quel est le bilan des deux lancers ?



2) Ce matin, j'ai perdu 9 billes. J'ai rejoué cet après-midi. Au total, sur toute la journée, j'ai gagné 6 billes. Que s'est-il passé l'après-midi ?



Quelques remarques

Les problèmes additifs et soustractifs ne relèvent pas d'une année scolaire seulement. Il ne faut pas s'attendre à ce que les élèves résolvent les problèmes proposés en fonction des structures mathématiques développées ci-dessus. Chacun doit pouvoir utiliser des procédures personnelles en fonction de la représentation qu'il se fait du problème. Les méthodes expertes seront introduites par le maître seulement lorsque l'enfant aura donné du sens au type de problème proposé. On peut introduire un certain type de problème au cycle 1 et travailler la méthode experte en 5^H et 6^H.
Exemple :
J'ai gagné 8 billes, j'en ai maintenant 15. Combien en avais-je auparavant ?
L'enfant de cycle 1 va peut-être faire un dessin avec 15 billes, entourer les 8 billes, puis dénombrer les 7 billes restantes. Il peut également procéder par essais successifs : *Est-ce que 8 + 5 donne 15 ? etc…* Il peut essayer de mettre le problème sous forme d'équation, c'est-à-dire qu'il reconnaîtra peut-être une addition lacunaire.
En 5^H et 6^H, on procédera à l'apprentissage de la méthode experte pour ce genre de problème : 15 – 8 = 7.

Chronologie pour les problèmes ETE

Premiers types de problèmes résolus avec la méthode experte :
⇒ calcul du type a + b
- type "transformation d'états" ET$^+$**E**

⇒ calcul du type a – b
- type "transformation d'états" ET$^-$**E**

Seconds types de problèmes résolus avec la méthode experte :
⇒ calcul du type a – b
- type "transformation d'états" **E**T$^+$E

⇒ calcul du type a + b
- type "transformation d'états" **E**T$^-$E

Par la suite :
- type "transformation d'états" ET$^+$E [2]
- etc …

[2] « Bien que, dans les trois cas, la solution consiste en une simple soustraction, la difficulté de ces trois problèmes [ET$^-$**E**, **E**T$^+$E, E**T$^+$**E] n'est pas la même, et il n'y a pas loin de deux années de décalage, pour certains enfants, entre la réussite au premier problème et la réussite au deuxième. » Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Bern: P. Lang, p. 40.

Remarque

Deux autres catégories de problèmes sont mentionnées dans le lexique du PER :

- Type RTR (relation, transformation, relation) : une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif. Exemple : Valentin devait 6 billes à Séraphine. Il lui en rend 4. Il ne lui en doit plus que 2.
- Type RRR (relation, relation, relation) : deux états relatifs se composent pour donner un état relatif. Exemple : Valentin doit 7 billes à Séraphine, mais Séraphine lui en doit 3. Valentin doit donc 4 billes à Séraphine.

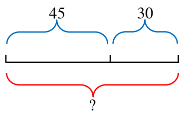
Mais elles ne figurent pas dans la progression des apprentissages.

6 Les canards

Résous les neuf problèmes suivants. Explique ensuite pourquoi ils ont été arrangés en lignes et en colonne de cette manière et explique leurs relations

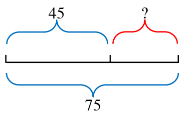
<table>
<tr>
<td>

(1) Dans la rivière, il y a 45 canards blancs et 30 noirs. Combien y a-t-il de canards en tout ?



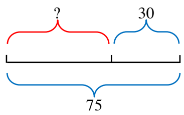
</td>
<td>

(2) Dans la rivière, il y a des canards blancs et des canards noirs. Il y a 75 canards en tout. 45 canards sont blancs. Combien y a-t-il de canards noirs ?



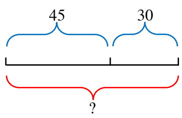
</td>
<td>

(3) Dans la rivière, il y a des canards blancs et des canards noirs. Il y a 75 canards en tout. 30 canards sont noirs. Combien y a-t-il de canards blancs ?



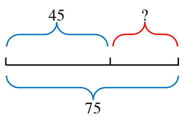
</td>
</tr>
<tr>
<td>

(1) Dans la rivière, il y a un groupe de canards. 30 canards s'envolent. 45 canards sont encore là. Combien y avait-t-il de canards au début ?



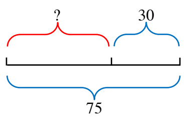
</td>
<td>

(2) Dans la rivière, il y a 75 canards. Quelques canards s'envolent. 45 canards sont encore là. Combien de canards se sont-ils envolés ?



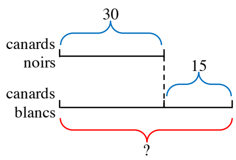
</td>
<td>

(3) Dans la rivière, il y a 75 canards. 30 canards s'envolent. Combien de canards sont encore là ?



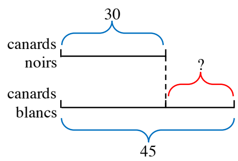
</td>
</tr>
<tr>
<td>

(1) Dans la rivière, il y a 30 canards noirs. Il y a 15 canards blancs de plus que de canards noirs. Combien y a-t-il de canards blancs ?



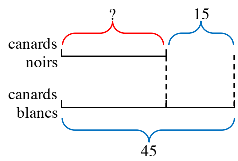
</td>
<td>

(2) Dans la rivière, il y a 30 canards noirs et 45 canards blancs. Combien y a-t-il de canards blancs de plus que de canards noirs ?



</td>
<td>

(3) Dans la rivière, il y a 45 canards blancs. Il y a 15 canards noirs de moins que de canards blancs. Combien y a-t-il de canards noirs ?



</td>
</tr>
</table>

D'après Sun & Bartolini Bussi, 2018, p. 65