Les sapins

Degrés	6H	Sujet mathématique	Résolution de problèmes, proportionnalité
Plan de leçon réalisé par Alexandra Weber, André Fivaz, Annie Eternod, Antoinette Granget, Emilie Baud, François Leboeuf, Nathalie Rod, Noémie Cordey, Olivier Lovis, (EP Floréal, Lausanne), Stéphane Clivaz (HEP Vaud)			

Table des matières

Plan d'Études Romand

La leçon est organisée autour de la résolution d'un problème numérique. Il s'agit de favoriser l'appropriation de modes de penser propres à la résolution de problèmes. Le problème choisi est un problème multiplicatif.

MSN 23 — Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs…

- …en traduisant les situations en écritures additive, soustractive, multiplicative ou divisive
- …en sélectionnant les données numériques à utiliser

ÉLÉMENTS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

- tri et organisation des informations (liste, tableau, schéma, croquis,…)
- mise en œuvre d'une démarche de résolution
- ajustement d'essais successifs
- pose d'une conjecture, puis validation ou réfutation
- déduction d'une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- réduction temporaire de la complexité d'un problème
- vérification, puis communication d'une démarche et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats
- acceptation ou refus d'un résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur, la connaissance des opérations ou la confrontation au réel
- traduction des données d'un problème en opérations arithmétiques
- résolution de problèmes multiplicatifs et divisifs : situations d'itération, […] de proportionnalité

Indication pédagogique

Proposer des problèmes variés permettant aux élèves de se construire des représentations complètes des différents types de situations à résoudre

MSN 25 — Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques…

- … en imaginant et en utilisant des représentations visuelles (codes, schémas, graphiques, tableaux,…)
- … en identifiant des invariants d'une situation
- … en triant et organisant des données
- … en communiquant ses résultats et ses interprétations

Les sapins (fiche prof)

Le plan de leçon proposé ici développe un dispositif permettant aux élèves de se représenter un problème, en vue d'un apprentissage à long terme de la compétence à résoudre des problèmes. La leçon est planifiée pour une durée de 45 à 60 minutes.

Contenu mathématique

- Résolution de problème, proportionnalité

Matériel

- Énoncé du problème sans la question pour projection (annexe)
- Fiches élèves avec question (annexe)
- Cartes avec les deux types de sac de terreau pour chaque groupe (30 sacs de 10 litres et 10 sacs de 50 litres, annexe)
- Monnaie factice pour chaque groupe (pièces de 1 et 2 francs, annexe)
- Éventuellement un petit sac de terreau pour montrer aux élèves

Gestion

1. Mise en situation

- Présentation de l'énoncé du problème (sans la question) projeté. L'enseignant·e en fait une lecture à haute voix.
- Clarification du vocabulaire selon les besoins des élèves, en collectif (pépinière, terreau ...)
- Indication orale du but : jouer cette situation par groupe. Les rôles sont distribués par l'enseignant·e : Sam, vendeur·se, caissier·ère.

La tâche est projetée sans la question.
L'exemple reste projeté pendant la durée des travaux de groupe.

2. Travail par groupes de 2-3 élèves :

- L'enseignant·e prévoit des groupes de 3 élèves (éventuellement un groupe de 2 ou un groupe de 4 si nécessaire).
- Consignes
  - jouer la scène qui représente ce qui a été lu (version projetée)
  - on n'écrit pas (pas de crayon et de papier)
  - chaque élève joue le rôle qui lui a été attribué : Sam, vendeur·se, caissier·ère
  - matériel à disposition : cartes sacs (pour le vendeur) et monnaie factice (pour Sam et pour le·la caissier·ère).
- L'enseignant·e supervise les groupes et propose des relances si besoin :
  - demander de jouer la scène
  - aider certains groupes à arranger les sacs et l'argent
  - demander de reformuler l'énoncé

3. Mise en commun intermédiaire/relance en collectif

- L'enseignant·e demande à un ou plusieurs groupes de jouer le début du problème devant toute la classe. (éventuellement choisir un groupe avec une mise en scène minimale et un autre groupe avec une mise en scène plus « théâtralisée »).
- Interrompre la saynète avant le passage en caisse ; ne faire jouer que Sam et le vendeur (Le but est que la recherche se poursuive après cette mise en commun intermédiaire)
- Discussion sur la saynète :
  - Vérifier que la scène corresponde à la situation mathématique et que chaque élève joue bien son rôle
  - Relever les éléments essentiels d'une part et ceux qui peuvent être omis d'autre part, ce qui est utile et ce qui ne l'est pas (par exemple, le but n'est pas de faire rire les copains ou de donner des détails pittoresques).

Le but de cette mise en commun est de s'assurer que les élèves ont compris ce que signifie « la moitié de chaque sorte ». Cette mise en commun intermédiaire peut être abandonnée si, après avoir observé le travail de ses élèves, l'enseignant·e estime qu'elle n'est pas nécessaire. En vue d'un apprentissage à long terme, il est nécessaire à ce stade de faire prendre conscience aux élèves de l'utilité de choisir les éléments pertinents du problème.

4. Poursuite du travail par groupe :

- Consignes :
    - Poursuivre le jeu de rôles selon les besoins des groupes
    - Une fois que le groupe a terminé[*] de jouer la saynète, lui donner la fiche comprenant l'énoncé et la question (annexe)
    - Résoudre le problème par écrit : écrire les étapes du raisonnement ou les calculs sur la fiche et noter la réponse.

L'enseignant·e supervise les groupes et propose des relances si besoin
    - suggérer d'échanger les rôles au sein du groupe
    - demander de jouer la scène
    - demander d'utiliser effectivement le matériel
    - relances sous forme de questions. Par exemple
        - Qu'est-ce que tu veux acheter ?
        - Combien coûte un sac de 10 litres ?
        - En tout, combien est-ce que ça coûte ?
        - C'est des litres ou des francs ?

5. Mise en commun finale :

Les élèves restent disposés par groupes dans la classe pendant la mise en commun.

Premier moment : résolution du problème

- L'enseignant·e demande à un ou plusieurs groupes de rejouer la scène devant la classe. Il les avertit qu'ils seront interrompus afin qu'on puisse noter les calculs au tableau au fur et à mesure.
- Après chacune des 3 étapes de la résolution du problème, l'enseignent·e demande à la classe :
    - Comment écrire ce qui a été joué ? (l'enseignant·e écrit les propositions au tableau)
    - Quel groupe a écrit la même chose ?
    - Quel groupe a fait autrement, a d'autres propositions ? (l'enseignant·e écrit les propositions au tableau)
    - Est-ce que les calculs notés correspondent à la saynète ?
- L'enseignant prend note des différentes propositions au tableau et fait valider ou invalider les propositions en discutant avec le groupe-classe :
    - Faire observer les liens entre les calculs et la saynète, quels calculs correspondent à la saynète.
    - Pour les calculs qui ne correspondent pas, demander de justifier. Barrer ces calculs.
    - Faire relever que certains calculs ne sont pas les plus efficaces mais « collent » à la situation (par exemple des additions répétées plutôt que des multiplications pour les élèves qui payent un sac à 6.- plus un sac à 6.- plus…). Garder ces calculs au tableau.
- Alternative : durant l'étape 4, demander aux élèves de noter leurs calculs et/ou démarches sur des petites affiches afin de les utiliser pendant la mise en commun. Cela permet notamment de regrouper les procédures similaires lors de la mise en commun.

Deuxième moment : discussion sur la méthode de travail

- Est-ce que le fait de mettre la situation en scène vous a aidés/a été utile pour résoudre le problème ?

---

[*] Voir *Limites et points d'attention* ci-dessous.

- Comment puis-je procéder autrement pour me représenter un problème si je ne peux pas le jouer ? (les élèves pourront suggérer d'utiliser des jetons, de faire un dessin, …)
- Est-ce qu'on peut reproduire cet outil (jeu de rôles) pour d'autres situations ?
- Petite institutionnalisation (écrite au tableau, éventuellement recopiée par les élèves) :
    - Pour me représenter le problème, je peux jouer la situation. Les calculs correspondent à ce qu'on joue.
    - Les calculs servent à écrire le raisonnement. Ils permettent ensuite de calculer la solution.

Démarches possibles des élèves

(démarches observées qui n'ont pas forcément abouti à un résultat correct)

- Compter l'argent
- Utilisation des nombres du problème sans lien avec l'énoncé (calculs au hasard)
- Début de la démarche correcte, interruption avant la dernière étape (addition)
- Poser les francs sur chaque sac, puis compter l'argent sans effectuer de calcul
- Effectuer les calculs corrects dès le départ sans même avoir fait le jeu de rôle

Difficultés des élèves

- Mélanger les litres et les francs : cette difficulté a généralement été évitée grâce à la présence des sacs et des pièces de monnaie.
- Certains élèves restent en retrait et ne participent pas au jeu de rôle parce qu'ils ne comprennent pas ce que font leurs camarades. Ils ne semblent ne tirer aucun bénéfice de l'aide qu'aurait pu apporter le jeu de rôles.

Apprentissages des élèves

Acquérir de nouveaux « outils » qui peuvent faciliter l'appropriation d'un problème sans être confronté directement à la difficulté d'écrire les calculs.
Comprendre que l'écriture arithmétique représente l'histoire racontée par le problème et qu'ils ne servent pas qu'à effectuer les calculs.
Les éléments ont été évoqués par les élèves lors de la mise en commun :

- Cela me permet de me mettre dans la réalité.
- Je peux jouer avec d'autres objets.
- Je peux dessiner.

Limites et points d'attention*

- Notre souci principal concerne les élèves qui ne parviennent pas à s'approprier le problème malgré le travail effectué.
- A l'opposé, certains élèves avaient écrit les calculs et résolu le problème avant même de jouer la scène.
- Lors de l'étape 4, il serait judicieux de ne pas remettre la fiche trop rapidement. Nous avons observé que dès le moment où les élèves ont la fiche devant eux, ils interrompent le jeu de rôles et commencent à écrire des calculs. Il nous semble important que les élèves jouent la saynète jusqu'au bout avant de compléter la fiche. Le moment adéquat pour donner la fiche à chaque groupe reste toutefois délicat à déterminer.
- Le fait de faire jouer tous les groupes devant la classe durant la mise en commun permettrait à tous les élèves de jouer et de vérifier leur compréhension du problème. Le risque est toutefois que cela prenne beaucoup de temps et que les élèves n'observent pas vraiment ce que présentent les autres groupes.
- La plupart des élèves trouvent facilement que « 400 litres de terreau, la moitié de chaque sorte » signifie qu'il faut 200 litres de chaque sorte. Pourtant, ils parviennent difficilement à retranscrire cela par un calcul. Dans ce cas, le fait d'exiger d'écrire le calcul correspondant risque de bloquer les élèves. Il est alors probablement préférable de ne pas insister et éventuellement de reporter la discussion de ce calcul au moment de la mise en commun finale.

* Ces points sont repris et développés dans *développement de la fiche prof* ci-dessous.

Suite, prolongements

- Prendre juste les élèves qui n'ont pas compris et rejouer avec eux.
- Répéter la mise en scène pour d'autres problèmes avant de les transcrire sous forme de calcul.
- Évoquer une telle mise en scène pour d'autres problèmes (en mots, en dessins).
- Verbaliser et faire verbaliser oralement le lien entre une partie de l'énoncé et l'opération arithmétique lors du travail sur les problèmes.
- Amener les élèves à créer des liens entre les problèmes effectués.

Commentaires (développement de la fiche prof)

Contenu mathématique

La question de la représentation du problème et de la manière d'aider les élèves à « entrer dans le problème » était à l'origine de cette leçon. Cette question, du point de vue de l'aide individuelle aux élèves avait été travaillée dans un plan de leçon 3LS (*Les 99 carrés*). Cette leçon se focalise sur la mise en place d'un dispositif collectif pour cet apprentissage à la représentation du problème.
Du point de vue du contenu mathématique, le problème choisi est un problème complexe (Houdement, 2017), contenant notamment des situations multiplicatives de proportionnalité, mais qui peuvent être résolues de manière additive. Les calculs à effectuer sont tous élémentaires pour des élèves de 6H.

La résolution de problèmes dans l'enseignement…

(repris du plan de leçon *Les 99 carrés*)

La résolution de problèmes est une activité typique en mathématiques.
Dans l'enseignement, elle peut être considérée de trois manières selon ses buts. On peut enseigner **pour** résoudre des problèmes (les notions mathématiques enseignées ont alors pour finalité de résoudre des problèmes), on peut enseigner **à** résoudre de problèmes (notamment par l'apprentissage de stratégies de résolution de problème, par exemples inspirées de Polya, 1965), et on peut enseigner **par** le problème. L'approche choisie par le PER est d'abord d'enseigner **par** le problème, mais cela implique aussi d'enseigner **à** résoudre des problèmes, sans toutefois donner des "trucs", efficaces seulement dans certaines situations particulières mais qui pourraient empêcher les élèves d'entrer dans le problème et d'apprendre **par** la résolution du problème.
Nous savons que c'est au travers de l'activité de résolution de problème que l'élève construit des connaissances mathématiques. La difficulté principale se situe au niveau de la traduction du problème exprimé dans un langage non scientifique en une expression mathématique de celui-ci. L'élève doit donc commencer par se représenter le problème et « inventer » une procédure pour le résoudre. Il ne s'agit donc pas seulement de « deviner la bonne opération », mais bien de la choisir selon sa compréhension du problème. Dans le monde des mathématiciens, un problème peut occuper un scientifique des années durant (parfois toute une vie). Ainsi, résoudre un problème n'est pas trouver instantanément la procédure à appliquer, mais bien tâtonner, chercher, essayer, vérifier, essayer encore, tester, vérifier encore, etc. Or, de nombreux élèves pensent que si la solution ne leur « saute » pas aux yeux, ils sont incapables de résoudre le problème. Ces élèves n'ont pas construit la posture attendue par les mathématiques et se décourageront rapidement. L'enseignant·e a donc la difficile mission d'initier les élèves au goût de cette recherche, à la persévérance et à la construction d'une conception qui intègre le fait de ne pas trouver tout de suite la réponse comme faisant partie intégrante de l'activité de résolution de problèmes.
Dans cette perspective, aider les élèves dans la résolution de problème relève d'un guidage affectif (aide à la persévérance, sentiment d'auto-efficacité), cognitif (poser des questions qui invitent l'élève à chercher, tâtonner, vérifier…) et métacognitif (favoriser la prise de conscience des processus mis en œuvre).

Construction de la leçon

Le groupe a choisi de construire la leçon à partir d'un problème tiré des épreuves cantonales de référence du canton de Vaud (épreuve 6H, mai 2015). En effet, ce type de problème est généralement très mal réussi par les élèves et il semble difficile de travailler en classe ce qui pose principalement difficulté dans ce cas, l'entrée dans le problème.

Les points sur lequel nous avons principalement réfléchi pour cette leçon sont :

- quels dispositifs mettre en place pour aider collectivement les élèves à se représenter ce problème, et pour qu'ils apprennent à se représenter d'autres problèmes ?
- quel est le lien entre l'écriture des opérations à effectuer et l'énoncé du problème ?
- comment gérer les différences entre les élèves ?

Nous présentons ci-dessous quelques éléments de nos réflexions, les quelques réponses que nous avons trouvées ou apportées et les nombreuses questions que nous avons encore.

Quels dispositifs mettre en place pour aider collectivement les élèves à se représenter ce problème, et pour qu'ils apprennent à se représenter d'autres problèmes ?
Nous sommes partis de la constatation mentionnée ci-dessus que « la difficulté principale se situe au niveau de la traduction du problème exprimé dans un langage non scientifique en une expression mathématique de celui-ci. L'élève doit donc commencer par se représenter le problème ». Afin de lutter contre le réflexe acquis d'écrire des calculs correspondant aux nombres de l'énoncé, un peu au hasard, plutôt que de traduire le problème, le choix a été fait d'insister sur la représentation du problème dans un premier temps, puis de travailler sur le lien entre cette représentation et l'écriture des opérations à effectuer.
Grâce à la construction et à l'observation de deux versions de la leçon, nous avons mis en place une situation dans laquelle, lors de la première étape, la question n'apparaît pas, les élèves n'écrivent pas et n'effectuent aucun calcul. Ils sont en revanche conduit à vivre chaque partie du problème correspondant à une opération à effectuer pour le résoudre.
Les étapes 4 et 5 permettent ensuite d'écrire les opérations et de discuter collectivement le lien entre la situation jouée (et donc le problème initial) et l'opération écrite. Ce moment de discussion, en particulier au sujet de la diversité des écritures discutées, est essentiel. En effet, il permet aux élèves de prendre conscience que l'opération est d'abord une traduction du problème dans une langue particulière, la langue mathématique. Ce n'est qu'ensuite que l'opération est effectuée ou transformée pour donner un résultat.

Quel est le lien entre l'écriture des opérations à effectuer et l'énoncé du problème ?
L'opération écrite correspond parfois à la fois à la traduction du problème en langage arithmétique et au calcul effectué.

Par exemple,	*Luc a 42 billes et en perd 3, combien a-t-elle de billes maintenant ?*
se traduit par	42 – 3 = ...
et se résout en effectuant l'opération	42 – 3 → 39
Dans notre problème	*Combien coutent 4 paquets à 6.- ?*
se traduit par	4 × 6 = ...
ou en écriture additive	6 + 6 + 6 + 6 = ...
et se résout en effectuant l'opération.	4 × 6 → 24 ou 6 + 6 + 6 + 6 → 24

Dans ce genre de cas, les élèves parviennent souvent assez facilement à écrire ces opérations pour traduire l'énoncé du problème.

En revanche, dans certains cas, la traduction arithmétique du problème, l'opération à effectuer et le calcul effectivement réalisés peuvent être différents.

Par exemples, le problème	*Luc a 39 billes et il en gagne de nouvelles. Il en a maintenant 42. Combien Luc a-t-il gagné de billes ?*
se traduit par	39 + ... = 42
se résout par l'opération	42 – 39 = ...
et le résultat peut être obtenu en effectuant l'opération	42 – 39 → 3
ou de fait plus simplement en surcomptant de 39 à 42 et en comptant que 3 pas sont nécessaires	

Dans notre problème	*il a besoin de 400 litres de terreau, la moitié de chaque sorte*
se traduit par	$\underbrace{\ldots + \ldots}_{\substack{deux\ fois \\ le\ même\ nombre}} = 400$
se résout par l'opération	400 : 2 = …
et le résultat est obtenu en effectuant l'opération.	400 : 2 → 200

Dans ce genre de cas, il est beaucoup plus délicat d'écrire ces opérations pour traduire l'énoncé du problème. Il est dès lors probablement utile d'encourager les élèves à utiliser des écritures moins standardisées, qui peuvent différer d'un élève à l'autre, comme des additions à trous, voire des schémas, qui permettent de mieux traduire le problème. La présence de plusieurs écritures arithmétique ou graphiques, et la discussion collective de leur signification lors des mise en commun, est probablement une manière de favoriser l'apprentissage du lien entre la représentation du problème et son écriture en langage mathématique. Cet apprentissage se réalise évidemment sur un temps long et cette leçon n'est qu'une étape possible de cet apprentissage.

Comment gérer les différences entre élèves, durant la leçon et à plus long terme ?
La principale difficulté qui demeure pour le groupe est la gestion des différences entre élèves. Certains élèves n'ont pas eu besoin du tout du jeu de la saynète, alors que quelques autres ne sont pas vraiment entré dans le problème malgré la phase de jeu de rôle. Pour les premiers, nos observations nous conduisent à penser que ce jeu est utile afin de leur permettre d'acquérir des savoir-faire et de les aider à donner du sens aux calculs qu'ils écrivent. Pour les seconds, une leçon est évidemment insuffisante pour donner confiance à ces élèves afin qu'ils s'investissent dans le problème, mais nous pensons qu'un travail régulier de ce type sera de nature à permettre à ces élèves de progresser.
Cette difficulté d'enseignement se reflète aussi dans la constitution des groupes. Les deux modalités présentent leurs avantages et leurs inconvénients. Lors de cette leçon, notre équipe a fait le choix de groupes homogènes, dans le but que chaque élève soit actif et que la tâche ne soit pas portée uniquement par un élève qui a de la facilité dans un groupe.
Enfin, il nous est apparu parfois difficile de valider les démarches d'élèves quand on est seul avec la classe. Une solution pourrait résider dans la présence de deux enseignant·e·s afin de coacher les élèves en difficulté. Certains membres du groupe ont testé cette modalité qui permet au second adulte d'effectuer des relances ciblées auprès des éventuels groupes en difficulté. Il reste difficile de différencier selon les groupes le moment adéquat pour passer d'une étape à l'autre, par exemple de déterminer à quel moment remettre la fiche à chaque groupe. Cette compétence à « choisir le bon moment » nous semble devoir encore être travaillée.

Références

- DFJ Vaud. (2015). Epreuves cantonale de référence, mathématiques. Lausanne: Canton de Vaud, Département Formation et Jeunesse
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.
- LSM. (2015). Les 99 carrés. http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/plan-lecon-6h-99%20carres-v08-labo-3ls-2015-hep-vaud.pdf
- Polya, G. (1945/1965). *Comment résoudre un problème* (C. Mesnage, trad.). Paris: Dunod
- Van De Walle, J. A., Karp, K., Bay-Williams, J. M., Wray, J. A. & Rigelman, N. R. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Harlow: Pearson.

Annexes

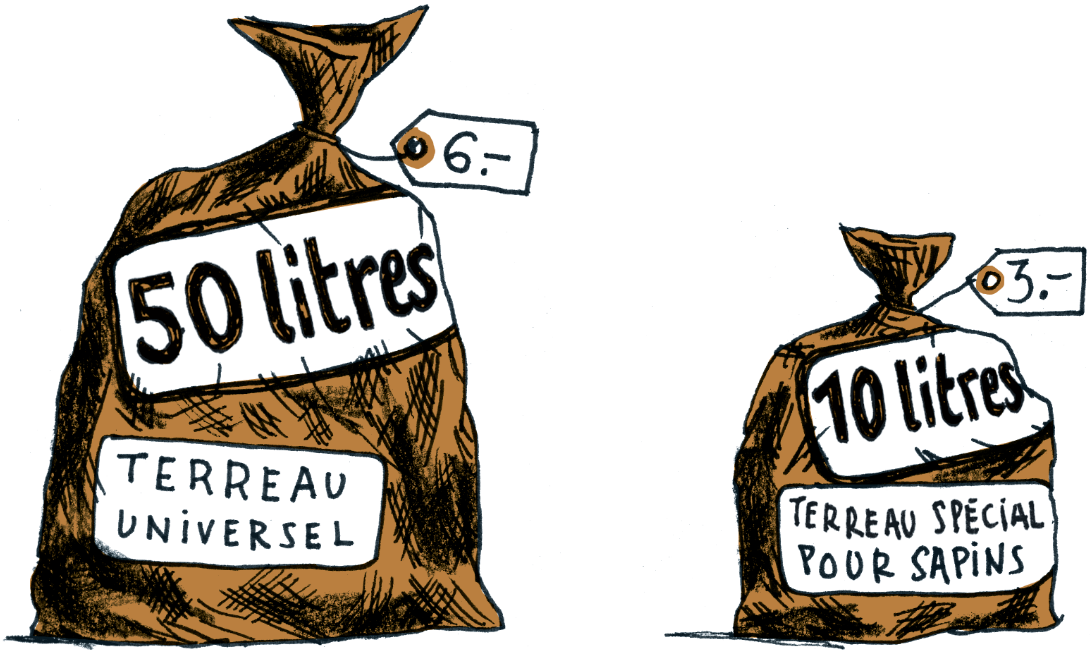
1. Énoncé sans question pour projection
2. Fiche élève
3. Cartes terreau
4. Monnaie factice

1 Énoncé sans question pour projection

Les sapins

Sam veut planter des sapins dans sa pépinière.
Il doit acheter 2 sortes de terreau :
- du terreau universel ;
- du terreau spécial pour sapins.

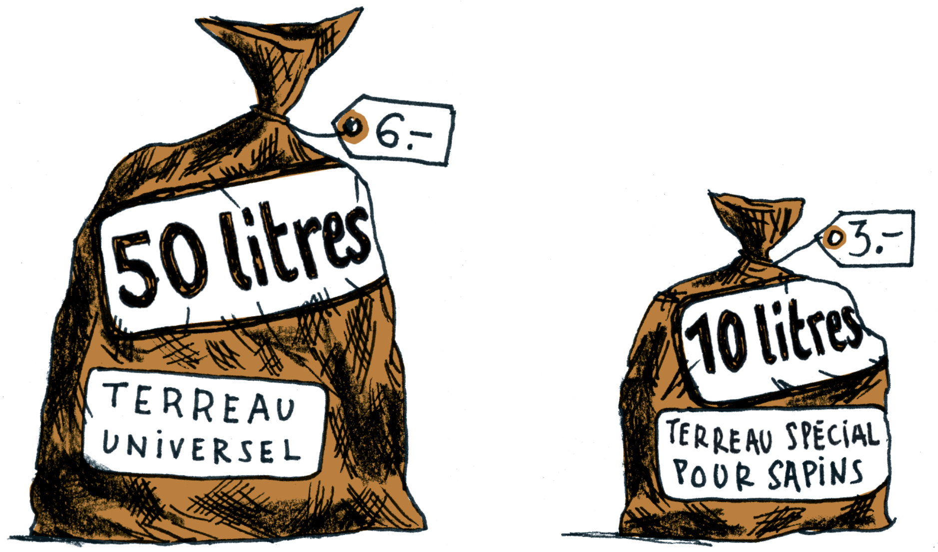
Au total, il a besoin de 400 litres de terreau, la moitié de chaque sorte.



Les sapins

Sam veut planter des sapins dans sa pépinière.
Il doit acheter 2 sortes de terreau :
- du terreau universel ;
- du terreau spécial pour sapins.

Au total, il a besoin de 400 litres de terreau, la moitié de chaque sorte.



Combien Sam devra-t-il payer en tout ?

Espace pour ta démarche ou tes calculs.

Ta réponse : ▶ Sam devra payer ______________________________.

pépinière : terrain où l'on fait pousser des arbres que l'on replantera ailleurs
terreau : engrais naturel fait de terre et de plantes en décomposition

3 Cartes terreau


3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

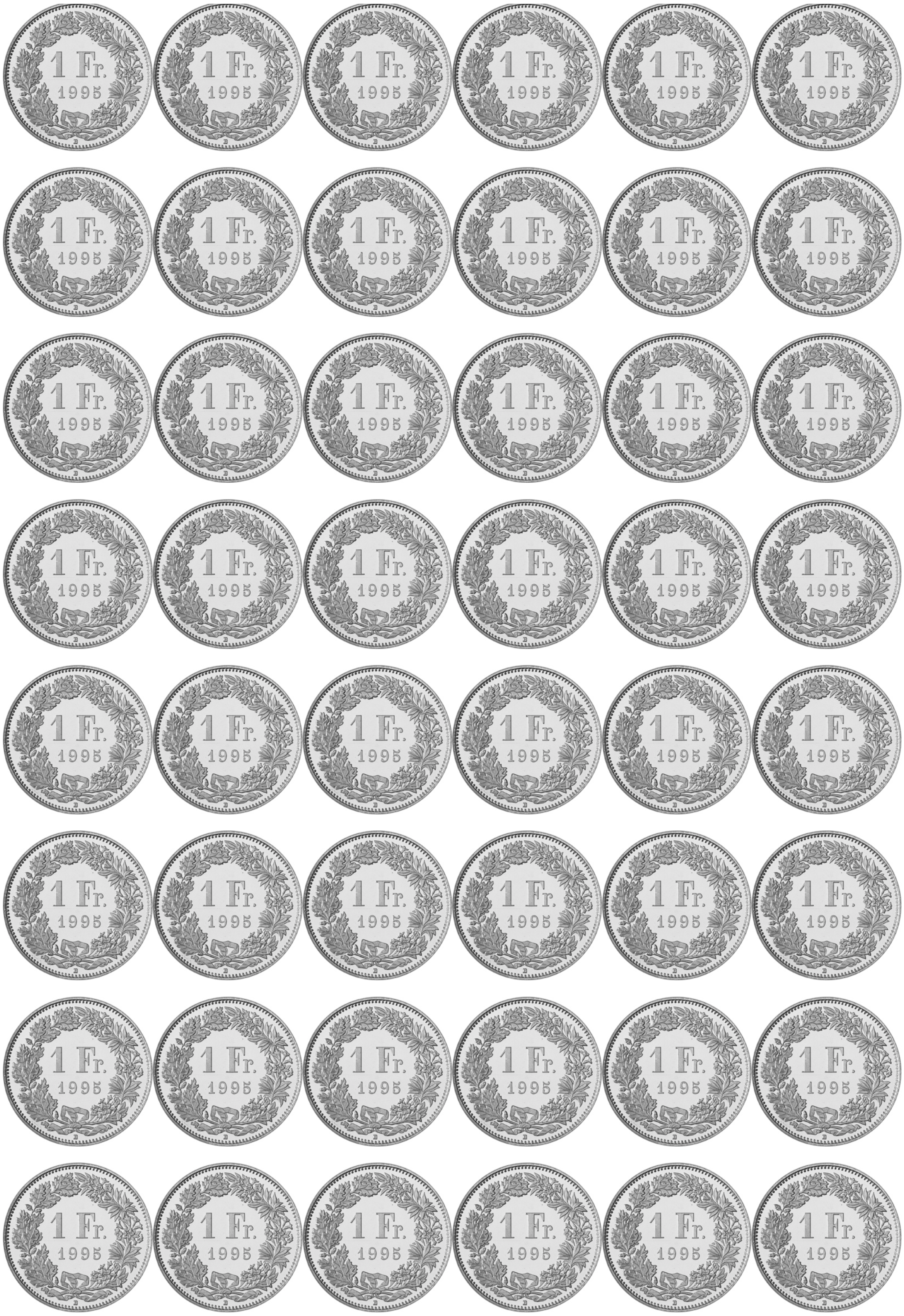
3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

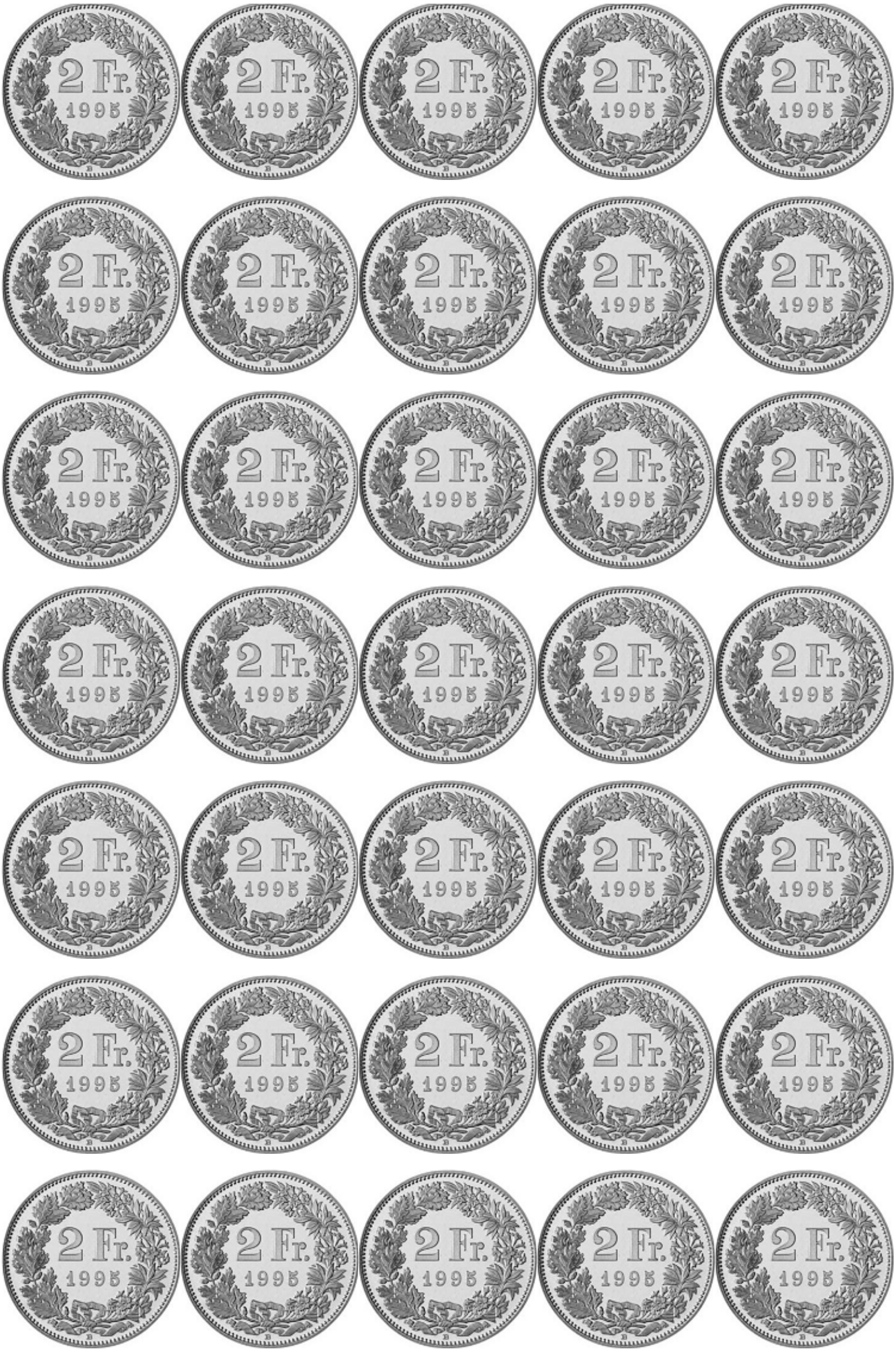
3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

3.-
10 litres
TERREAU SPÉCIAL
POUR SAPINS

4 Monnaie factice




2 Fr.
1995