

Le partage du carré

Degrés	6H	Sujet mathématique	Décomposition d'une surface plane
Plan de leçon réalisé par le groupe PEERS Joetsu 17-18 : Liliane Vialle, Odile Perakis, Sébastien Gauthey, Timothée Ozelley (étudiants BP HEP Vaud), Stéphane Clivaz (HEP Vaud). Avec la collaboration de Hikari Kato, Hikari Kozakai, Katsuaki Banba, Ryo Otake, Yuichi Nezu (étudiants Joetsu University of Education, Japon), Takeshi Miyakawa (Joetsu University of Education, Japon).			

Table des matières

Plan d'Études Romand	1
Le partage du carré (fiche prof)	2
Contenu mathématique	2
Matériel	2
Déroulement de la leçon	3
Schéma du tableau	6
Gestion	7
Difficultés des élèves	7
Apprentissages des élèves	7
Limites et points d'attention	8
Suite, prolongements	8
Commentaires (développement de la fiche prof)	9
Contenu mathématique	9
Construction de la leçon	9
Difficultés rencontrées par l'enseignant-e	9
Références	10
Annexes	11
1 Extrait du livre de l'élève	11
2. Solutions	12
3. Fiche "28 carrés"	13

Plan d'Études Romand

MSN 21 – Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan

- ... en représentant des figures planes (...) à l'aide de croquis (...)
- décomposition d'une surface plane en surfaces élémentaires et recomposition

ÉLÉMENTS POUR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES : Résolution de problèmes géométriques en lien avec (...) les figures étudiées

- ... en imaginant et en utilisant des représentations visuelles (codes, schémas, graphiques, tableaux, ...)
- ... en triant et organisant des données
- ... en communiquant ses résultats et ses interprétations
- ... en se posant des questions et en définissant un cadre d'étude
- ... en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques

Le partage du carré (fiche prof)

Contenu mathématique

- Décomposition d'une surface plane
- Définition et propriétés du carré
- Croquis : « Comme le dessin, le croquis est une forme de représentation d'une figure. Il ne respecte pas les mesures mais contient des informations (cotes, symboles, explications complémentaires) qui permettent soit de définir la figure qu'il représente de manière univoque, soit de servir de support à la réflexion. » (PER : Lexique du domaine MSN)
- Différence entre validation par la mesure sur le dessin et par des propriétés géométriques
- Itération de procédures permettant de poursuivre le partage indéfiniment

Matériel

- Tableau noir
- Feuilles origami (environ 6 feuilles par élève). Ces feuilles ont un format carré, idéal pour la manipulation initiale. Elles se trouvent aisément dans le commerce de détail.
- Scotch de carrossier ou aimants pour afficher les solutions des élèves au tableau
- Grands carrés (coupés dans une feuille A3 - 29.7 x 42 cm) pour présenter le cheminement de partage pour certaines solutions
- Fiche 28 carrés (annexe 2) pour que les élèves reportent leur(s) solution(s)

Déroulement de la leçon

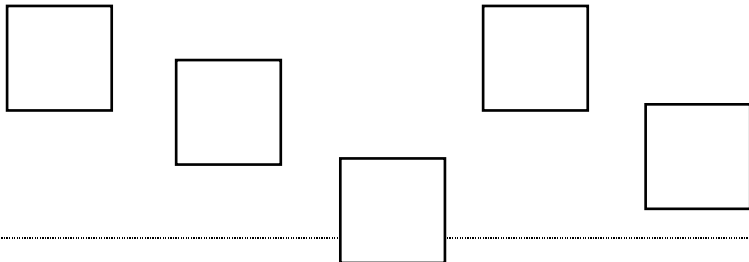
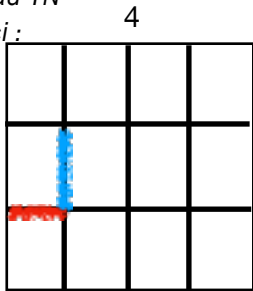
Moment activité	Modalité	Action enseignant·e	Action et objectif élèves	Durée
Introduction à la tâche Consigne	Collective	La consigne est la suivante : <i>"Trouver, pour chaque feuille, une manière différente de la partager en plusieurs carrés."</i> Elle est donnée oralement par l'enseignant·e et écrite au tableau noir (TN) pour que les élèves puissent la relire à tout moment. Une précision de la consigne : <i>"N'effacez pas vos traces, venez chercher une nouvelle feuille origami pour tester de nouvelles idées"</i> .	Ecoute active	2'
		Distribution de 3 feuilles de papier origami par élève.		
Exploration	Individuelle	Régulation: si des élève·s coupent le papier origami, l'enseignant·e leur demande de laisser la feuille entière. Si l'élève ne rentre pas dans la tâche, l'inviter à relire la consigne, la faire reformuler. Pas d'aide spécifique, mais des encouragements à persister dans la tâche. L'enseignant·e circule dans les rangs afin d'observer et de collecter les solutions afin de les afficher au tableau.	Activité exploratoire: Les élèves reçoivent les feuilles, ils peuvent partager le carré de deux manières : -pliage -dessin/croquis Lorsque les élèves trouvent une solution, ils comptent le nombre de carrés. Ensuite, ils peuvent essayer d'autres solutions. Les élèves dessinent avec un stylo épais sur les lignes de pliage si nécessaire et écrivent leur nom.	5'
Mise en commun de la partie exploratrice	Collective	Afficher des solutions correctes venant des élèves (choisir solutions relativement évidentes : 4, 9, 16) et incorrectes (diagonale, partager en rectangles). Laisser les élèves expliquer ce qui est "correct" et ce qui ne l'est pas. Définir avec les élèves quelques critères pour une solution correcte. Les noter aux tableaux pour en faire une check-list à laquelle les élèves devront se référer avant de venir montrer une solution à l'enseignant·e :	Les élèves explicitent leurs solutions en décrivant leurs stratégies lors de l'exécution de la tâche.	5'

		<ul style="list-style-type: none"> • Pas de diagonales • Pas de rectangles • La surface de la feuille est totalement utilisée (pas de bordures et de formes ne répondant pas aux critères du carré) <p>Consigne pour la suite de la tâche : contrainte de chercher des solutions contenant un maximum de 20 carrés.</p>		
Formation des groupes		L'enseignant-e forme les groupes. Poser les feuilles d'origami supplémentaires au fond de la classe.	Les élèves forment les groupes de 2 (ou 3).	
Phase de recherche 1	Par duos / groupes	<p>Recherches sur les feuilles d'origami. Les élèves doivent prendre une feuille par groupe, feuilles à disposition sur une table non-occupée par des élèves. (Faire attention qu'ils n'effacent pas la solution !). L'enseignant-e distribue la fiche "28 carrés" (annexe) et explique qu'il s'agit d'une trace pour eux de leurs solutions (ils ne copient pas ce qui est affiché au tableau).</p> <p>Pendant cette phase de recherche, l'enseignant-e peut circuler entre les tables, orienter, encourager, observer, préciser...</p> <p>Noter les nombres de 1 à 20 au tableau pour que les élèves viennent y déposer leur solution correspondante. Ceci génère un effet d'émulation et permet à tous les élèves de savoir quelle/s solution/s ont déjà été trouvées. L'enseignant-e rappelle les critères de solutions notés au TN dans la check-list.</p> <p>Consigne: <i>Quand vous avez trouvé une solution, vous comptez le nombre de carrés que vous avez sur votre feuille. Vérifiez que personne n'a encore mis cette solution (découpage identique) au TN et venez la mettre sous le bon nombre de carrés.</i></p> <p><i>Si vous avez le même nombre qu'un autre groupe, mais avec une solution totalement différente, vous pouvez aussi venir l'afficher.</i></p>	<p>Essayent de trouver d'autres solutions.</p> <p>Quand ils ont une nouvelle solution, ils l'amènent au tableau.</p> <p>Si les élèves ont plusieurs solutions différentes pour le même nombre de carrés, les afficher toutes pour susciter l'émulation et la curiosité.</p>	30'

		<p>Lorsqu'il y a une solution nouvelle ou originale, l'enseignant·e la reporte sur les grandes feuilles carrées (297 x 297 mm) placées au tableau afin d'illustrer le cheminement.</p> <p>Insister sur la nécessité de reporter les solutions trouvées sur la feuille A3 au fur et à mesure (report par groupe).</p>		
Si nécessaire, relances	Collective	<p><i>Pensez qu'ils n'ont pas besoin de tous être de la même taille (si personne n'arrive avec une solution avec les carrés de tailles différentes).</i></p> <p>Challenge sur le 6 Si nécessaire: <i>moi j'ai trouvé le 6!</i> (afficher la solution).</p> <p>Illustrer la possibilité de rediviser un carré en 4 ou en 9 (potentiellement: jusqu'à l'infini). Cela permet aux élèves d'accéder à de nouvelles solutions, mais à donner en dernier recours, car elle pointe trop sur les solutions et ne met pas en recherche les élèves.</p> <p>Challenge: alimenter la compétition vers les résultats qui n'ont pas encore été trouvés.</p> <p>Selon avancées groupes: lancer sur le challenge du 34 (càd: trouver comment diviser le carré initial en 34 carrés).</p>		
Mise en commun et synthèse	Collectif	<p>Analyse</p> <p><i>Reprendre les solutions mises de côté pour discuter avec toute la classe, de pourquoi elles ne peuvent être validées. Reprendre avec les élèves les solutions "complexes" (par exemple solution 6; 8) qui sont correctes, pour comprendre leur création et discuter pourquoi les formes obtenues sont bien des carrés.</i></p> <p>Conclusion : <i>faire apparaître une suite : ex: 4-7-10-13...</i></p>	Réponses attendues	10'

		Le but est de comprendre que si on coupe un carré en 4 (respectivement en 9) on obtient 3, (respectivement 8) carrés supplémentaires et que l'on peut continuer comme cela à l'infini.	
--	--	--	--

Schéma du tableau

<p>Conclusion</p> <p>Si on coupe un carré en 4, on obtient 3 carrés supplémentaires. On peut continuer comme cela à l'infini.</p>	<p>Trouver pour chaque feuille, une manière différente de la partager en carré.</p> <p>Zone de démonstration/analyse pour l'enseignant-e avec les grands carrés</p> 	<p>Check-liste éléments indésirables:</p> <ul style="list-style-type: none"> • formes "bizarres"(que des carrés) • diagonales • blanc (il ne reste rien) • solution identique à une déjà affichée au TN • Pas ceci : 
--	--	--

Les solutions seront affichées sur un tableau annexe									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Gestion

- Le fait de faire changer les élèves de place après la phase d'exploration permet d'avoir un travail par paires efficient.
- Il est souhaitable de montrer quelques solutions fausses après la première phase de recherche individuelle afin de les écarter. Il s'agit notamment de solutions comportant des diagonales (induit des triangles), ainsi que celles comportant des formes ou bandes blanches qui ne sont pas des carrés.
- Il est recommandé à l'enseignant-e d'expérimenter au préalable la tâche de partager les carrés, afin de bien comprendre le travail de recherche et les solutions acceptables.
- Le moment de la validation des solutions des élèves n'est pas facile, l'enseignant-e est très sollicité.e par les élèves. Les élèves ont de la peine à se rendre compte par eux-mêmes si telle ou telle solution est juste ou fausse et pourquoi (voir commentaires p.9).
- Les modalités de travail partent du travail en individuel, puis en groupes de deux et aboutissent à une partie collective lors de la mise en commun et de la synthèse.

Difficultés des élèves et interventions

- Le fait de partager le carré uniquement en carrés (aucune forme qui ne soit pas un carré, pas de vide) peut poser des difficultés à certains élèves.
- Lors des leçons expérimentées, celles durant lesquelles les élèves se servaient de leur règle ont conduit les élèves à se fier aux mesures obtenues sur le dessin pour déterminer s'il s'agissait ou non de carrés. Dans ce cas certaines divisions devenaient très difficiles à effectuer et les problèmes de précision conduisaient souvent à des conclusions erronées. En revanche, les leçons où les élèves traçaient des lignes à main levée ou à l'aide de règles non graduées incitaient les élèves à utiliser le raisonnement pour justifier leur solution.
- La volonté d'arriver à un nombre de carrés donné manquant à la liste des résultats peut inciter certains élèves à faire des erreurs de comptage pour arriver à ce résultat erroné !
- Élèves qui utilisent les ciseaux et/ou la règle afin de mesurer. Il faut insister sur la notion de croquis et de dessin et la possibilité du pliage. Il faut aussi expliquer que la feuille reste intacte, car l'objectif est d'explorer la surface qu'on leur donne.
- Il est nécessaire que les élèves vérifient à chaque fois leurs réponses, pas uniquement si le résultat est faux. Demander de vérifier qu'ils ont bien compté le nombre de carrés. Demander aux élèves de trouver/prouver que ce sont bien des carrés. Favoriser la représentation du problème comme une généralisation reproductible.
- Lorsqu'il y a des moments de découragement, il faut encourager en donnant des défis aux élèves : trouver comment partager en 34 carrés (le nouveau défi est là pour leur montrer que la tâche est plus vaste et moins bornée qu'ils ne pourraient l'appréhender). Les motiver, les garder concentrés jusqu'à la fin de la tâche.
- Parfois, l'élève a de la difficulté à entrer dans le problème, ne comprend pas la consigne et tâtonne pour commencer la tâche. Parfois sa feuille reste blanche ou il effectue des calculs au hasard. A certain moments, l'élève a besoin de matériel, il manque de place pour dessiner, son dessin est trop détaillé. On peut alors inciter les élèves à plier, à observer les autres élèves. On peut faire visualiser le problème, favoriser la représentation, favoriser une attitude mathématique (argumenter-démontrer ; vérifier), encourager, etc.
- Si l'élève n'a pas compris le concept de partage de carré (pliage/dessin), guider une partie du raisonnement, fournir à l'élève certaines questions, par exemple : "Souviens-toi des propriétés du carré", "d'un seul carré tu dois pouvoir faire plusieurs carrés." Encourager la posture de recherche tout en aiguillant sur le raisonnement relatif au thème.

Apprentissages des élèves

- Exploration des caractéristiques géométriques du carré.
- Distinction entre des caractéristiques mesurées sur un dessin et des propriétés déduites par un raisonnement.
- Audace et créativité dans l'approche permettant d'aboutir à des solutions correctes inédites et pas uniquement spontanées

Limites et points d'attention

- Les aides sont difficiles à apporter à une classe entière, car les élèves présentent une pluralité de réponses différentes et cela demande à l'enseignant·e de jongler avec la grande variété de solutions.
- Une bonne préparation incluant l'identification des stratégies, des difficultés, des erreurs et des aides en fonction des observations permet d'améliorer la gestion d'un plus grand nombre d'élèves.
- La préparation et la gestion de ce type de tâche sont difficiles lorsque les élèves ne sont pas habitués. Il est donc important d'en proposer régulièrement, voire de permettre aux élèves de revenir plusieurs fois sur un même problème, sans toutefois épuiser l'enthousiasme des élèves et de l'enseignant·e.

Suite, prolongements

- Proposer aux élèves de chercher une solution pour un nombre plus grand de carrés, par exemple 34, afin de voir s'ils ont adopté des stratégies d'itération comme celle permettant d'ajouter 3 carrés.
- Demander aux élèves quel est le nombre maximum de carrés qu'on peut obtenir.

Commentaires (développement de la fiche prof)

Contenu mathématique

La leçon traite du partage d'un carré, mais plus que des propriétés propres au carré, elle traite de la distinction entre la *forme* carré et la *figure* carré.

La forme est liée à la perception visuelle d'un objet concret, elle est l'ensemble de ses contours. La figure est un objet abstrait, elle existe indépendamment des représentations qui en sont faites. Par exemple, [...] une droite représentée par un croquis à main levée ou un dessin à la règle est finie et épaisse alors que la droite géométrique est une figure infinie et sans épaisseur. Le dessin est souvent indispensable pour représenter une figure ou pour réfléchir à des relations entre des figures, mais le dessin n'est pas la figure.

La géométrie traite des figures. Nous représenterons ces figures par des dessins ou des croquis, mais il s'agira de garder à l'esprit que ces représentations graphiques ne sont que des matérialisations d'objets abstraits. (Deruaz et Clivaz, 2018, p. 50)

Si l'enseignement de la géométrie à l'école primaire s'appuie beaucoup sur les connaissances spatiales des élèves, puis sur la réalisation et l'observation de dessins, cet enseignement évolue de plus en plus vers la géométrie basée sur le raisonnement et sur l'utilisation des dessins et des croquis comme support au raisonnement. Cette transition débute déjà à l'école primaire et *le partage du carré* est une tâche intéressante dans cette optique. En effet, l'utilisation de lignes tracées sur la forme carrée fournie ne permet rapidement pas de déterminer si les quadrilatères obtenus sont des carrés ou non. Les débats entre élèves permettent donc de confronter des arguments portant sur les formes (j'ai mesuré sur ma forme) à ceux portant sur la figure (j'ai divisé un côté par 3 et l'autre par 4). Ces débats entre élèves, orchestrés par l'enseignant·e, permettent de mettre en cause la validité absolue des arguments portant sur les formes et de distinguer progressivement le dessin géométrique de la géométrie. De plus, la pratique du débat en classe de mathématiques donne aux élèves la possibilité de s'entraîner à un genre de communication citoyen et engagé tout en les contraignant à tester leurs idées et à les mettre en forme afin de convaincre ou interpeller leurs pairs. Il ne s'agit pas, lors de la résolution de ce seul problème, de clarifier cette distinction et ce travail se poursuivra tout au long de la scolarité, mais il est important de débiter ce mouvement à l'école primaire et sur des tâches permettant la confrontation des deux types d'arguments.

Construction de la leçon

Cette leçon est le résultat d'un processus de travail réalisé dans le cadre d'un projet d'échange PEERS entre la Haute Ecole Pédagogique de Lausanne et l'université d'éducation de Joetsu au Japon. L'objectif était d'étudier un sujet mathématique et de travailler conjointement la préparation d'une leçon.

Cette leçon a été d'abord préparée en commun au Japon par les deux équipes, puis finalisée séparément par les équipes de chaque pays. La leçon helvétique, présentée ici, a été enseignée à quatre reprises par les étudiants suisses, avec chaque fois des feedbacks et des analyses sur le travail effectué. Une comparaison des leçons finales, helvétique et nipponne, a été réalisée lors de la partie suisse de l'échange.

Difficultés rencontrées par l'enseignant·e

A l'issue de notre travail sur la leçon, plusieurs difficultés ne sont pas encore résolues. Elles concernent principalement la question de la validation des solutions.

Lors de la phase de recherche en groupes, la validation des solutions par l'enseignant·e est délicate. L'enseignant·e est vite submergé·e par les sollicitations des élèves. Il est donc crucial d'avoir les solutions de "bases" bien en tête. Ceci n'est pas suffisant et nous avons constaté qu'il est impossible pour l'enseignant·e d'effectuer ce travail de validation/invalidation en direct. Nous avons tenté de mettre en place une *Check-liste éléments indésirables*, mais celle-ci s'est avérée moins efficace qu'espéré. La comparaison de la réalisation de notre leçon avec celle de nos collègues japonais nous montre qu'il est possible de déléguer une partie de cette validation au sein des groupes. Il est également fructueux d'organiser un débat entre élèves, conduit par l'enseignant·e, pour permettre un débat à propos des solutions produites.

Références

- Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999). *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROM
- Deruaz, M. & Clivaz, S. (2018). *Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Miyakawa, T. & Clivaz, S. (2018, 7 juin). *Le partage du carré : deux « mêmes » leçons en Suisse et au Japon*. Texte présenté au congrès Diversité des Lesson Studies: conceptions, pratiques et impacts, Lausanne. <https://vimeo.com/275770527>

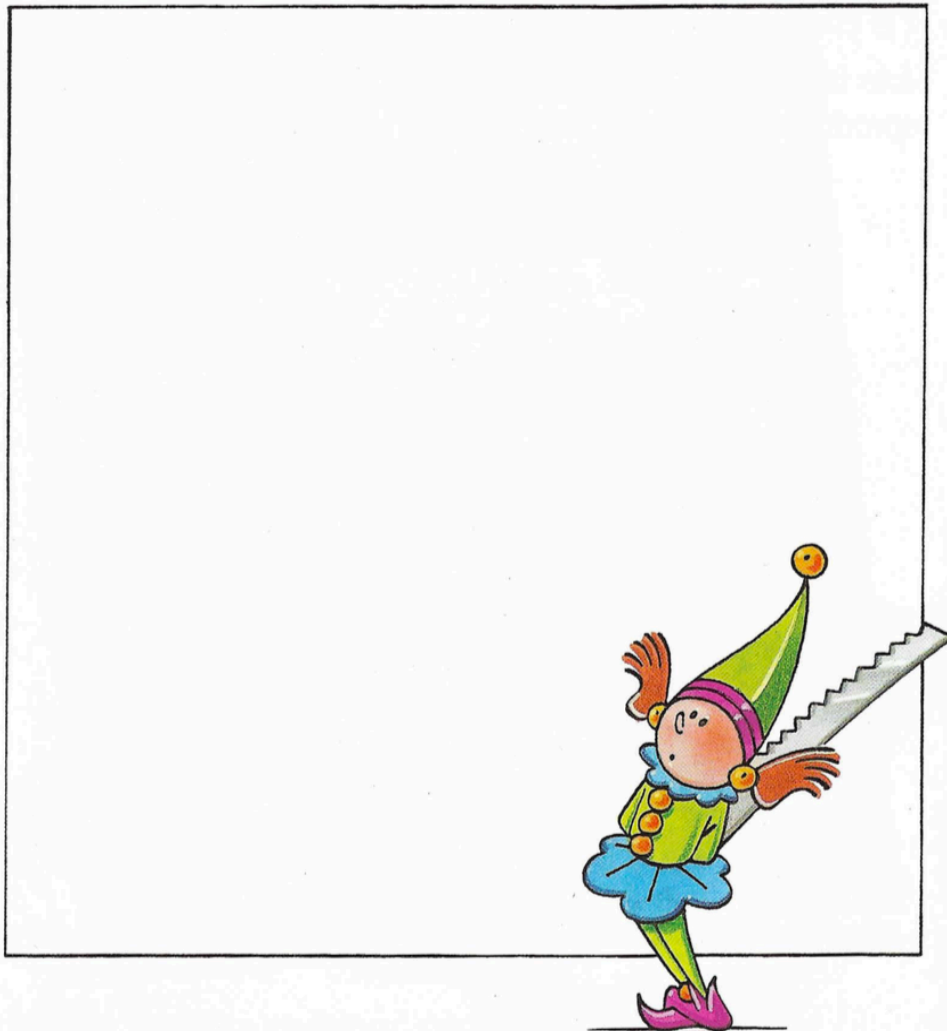
Annexes

1. Extrait du livre de l'élève 6H p. 48, "le Partage du Carré"
2. Solutions
3. Fiche 28 carrés

1 Extrait du livre de l'élève

Le partage du carré

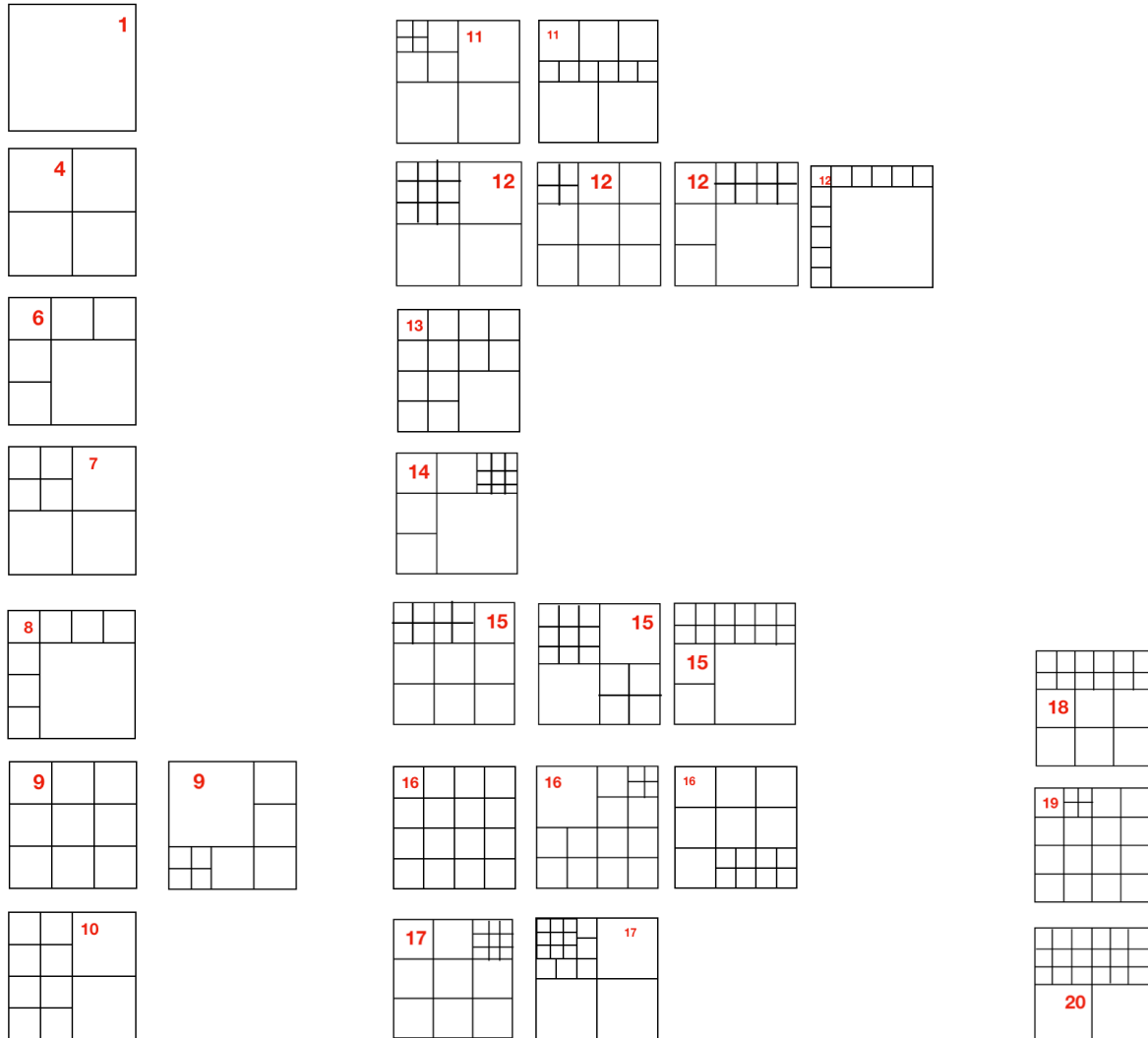
Partage un carré en plusieurs carrés, mais pas plus de 20.
Cherche le plus possible de solutions.



48

2. Solutions

(les solutions 2, 3 et 5 n'existent pas. La liste est non exhaustive pour les solutions multiples)



3. Fiche "28 carrés"
