Résolution de problèmes
Les 99 carrés

Degrés	6H	Sujet mathématique	Suites arithmétiques
Plan de leçon réalisé par le groupe LSM : Alexandra Weber, Émilie Baud, Kathrin Baetschmann, Olga Molina, Véronique Reichen, Virginie Florey (EP Floréal, Lausanne), Martine Balegno (EP Pully-Paudex-Belmont), Anne Clerc, Stéphane Clivaz (HEP Vaud).			

Table des matières

Plan d'Études Romand

La leçon est organisée autour de la résolution d'un problème numérique. Il s'agit de favoriser l'appropriation de modes de penser propres à la résolution de problèmes. Dans le cas présent, le problème traite de suite arithmétique, voire de fonction.

MSN 23 — Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs...

- ...en traduisant les situations en écritures additive, soustractive, multiplicative ou divisive
- ...en sélectionnant les données numériques à utiliser

ÉLÉMENTS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

- tri et organisation des informations (liste, tableau, schéma, croquis,...)
- mise en œuvre d'une démarche de résolution
- ajustement d'essais successifs
- pose d'une conjecture, puis validation ou réfutation
- déduction d'une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- réduction temporaire de la complexité d'un problème
- vérification, puis communication d'une démarche et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats
- acceptation ou refus d'un résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur, la connaissance des opérations ou la confrontation au réel
- traduction des données d'un problème en opérations arithmétiques

MULTIPLES, DIVISEURS, SUITES DE NOMBRES

- Reconnaissance et établissement de suites arithmétiques

Indication pédagogique

Proposer des problèmes variés permettant aux élèves de se construire des représentations complètes des différents types de situations à résoudre

Certains élèves confondent augmentation (ou diminution) et proportionnalité, pensant que toute augmentation est forcément proportionnelle et utilisent de ce fait la proportionnalité à mauvais escient

MSN 25 — Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques…

- … en imaginant et en utilisant des représentations visuelles (codes, schémas, graphiques, tableaux,…)
- … en identifiant des invariants d'une situation
- … en triant et organisant des données

Les 99 carrés (fiche prof)

Le plan de leçon proposé ici vise à préparer l'enseignant à fournir aux élèves les aides les plus favorables possibles à la représentation du problème, en vue d'un apprentissage à long terme de la compétence à résoudre des problèmes. En fonction de son observation, des essais, des erreurs, des questions et des difficultés des élèves, l'enseignant interviendra dans ce sens.

Contenu mathématique

- Suites arithmétiques, fonctions

Matériel

- Fiche élève Les 99 carrés (annexe)
- Prolongement (Prolongement 1, 2 et 3, en annexe)
- Allumettes
- Feuilles quadrillées 2cm

Gestion

1. Recherche

- Lecture de la donnée, démarrage de la recherche
- Moment de clarification (en commun)
  - L'enseignant-e clarifie éventuelle la consigne (mot « suite » : il faut continuer sur la même ligne, comme les wagons d'un train)
  - Les élèves sont informés du matériel à disposition : allumettes, feuilles quadrillées 2cm.
  - En vue de la discussion qui suivra, l'enseignant-e demande aux élèves de noter tout ce qu'ils font : essais, découvertes, à la fois pour les aider à chercher et pour s'en souvenir pour la discussion.
- Suite de la recherche (individuellement ou en duos) : Les aides seront d'autant plus porteuses que les élèves auront réellement eu le temps de chercher, voire de « patauger ». Il faut toutefois que les élèves puissent entrer dans la tâche et c'est la raison pour laquelle les aides de clarification de la consigne interviennent rapidement (voir ci-dessus).
- Aides de l'enseignant-e selon le tableau des aides ci-dessous
- Vérification par l'enseignant-e auprès des élèves qui ont terminé et distribution des prolongements si nécessaire
  L'objectif n'est pas que tous les élèves arrivent au bout du problème pour les 99 carrés. Certains élèves auront peut-être obtenu un résultat pour un nombre inférieur de carrés et pourront ainsi participer à la discussion qui suivra et en tirer profit.
- À la fin de la recherche, rappel aux élèves de noter leurs recherches et résultats pour la discussion qui suivra

2. Mise en commun

- Les élèves expliquent leurs stratégies et leurs démarches, par exemple :
  - essayer avec différents nombres
  - dessiner
  - construire avec des allumettes
  - noter et organiser les résultats
  - essayer avec des plus petits nombres de carrés
  - ...
- Les élèves décrivent leur représentation du problème. Par exemple :
  - Carrés côte à côte
  - Un □ puis des ⊐
  - Une locomotive avec 4 allumettes puis des wagons avec 3 allumettes
  - Des ⊏ avec une allumette pour fermer
  - Deux séries d'allumettes horizontales et des traverses (comme des rails)

- ...

Démarches possibles des élèves

Les démarches erronées sont indiquées en *italique rouge*.

Démarches	Commentaire
1. Dessiner les 99 carrés et compter 1.1. En les alignant 1.2. En "enroulant" : 1.3. En faisant des retours de lignes • *En répétant l'allumette du début de ligne* • Sans répéter l'allumette du début de ligne	Risque de découragement *Erreur éventuelle de répétition de l'allumette du début de ligne*
2. Ajouter des "paquets" de carrés • par exemple : ajouter 10 carrés au trois qui sont déjà là sur la consigne et constater qu'il faut 30 allumettes. En ajouter encore 10 (et donc 30 allumettes) jusqu'à 93 carrés et ajouter encore les 6 carrés qui manquent : 10+30+…+30+3+…+3=298	Risque élevé de s'emmêler les pinceaux
3. Opérations selon la vision de la frise (calcul et/ou dessin) 3.1. On ajoute à chaque fois 3 allumettes dès le 2ème carré • 4+3+3+…+3=298 • 4 + 98x3=298 3.2. On a 3 allumettes par carré et une en plus (au début ou à la fin) • 3+3+…+3+1=298 • 99x3 + 1=298 3.3. On a 4 allumettes par carré *3.3.1. On compte toutes les allumettes* ○ *4+4+…+4=396* ○ *99x4=396* 3.3.2. On enlève celles qui sont en à double ○ 4+4+…+4 –1–1–…–1=298 ○ 99x4 –98=298 3.4. On a les horizontales (2 par carré) et les verticales (1 par carré) plus 1 pour fermer le dernier carré • 99+99+99+1=298	
4. Règle de proportionnalité *4.1. À partir de 1 carré : 99x4=396* *4.2. À partir de 3 carrés : 99, c'est 33 fois 3, donc il faut 33x10 allumettes, c'est-à-dire 330* *4.3. À partir d'un autre nombre de carrés*	*Représentation erronée du problème*

Aides

Le tableau qui suit insiste sur le lien entre l'intervention, ce qui la déclenche (en amont) et son but (en aval). C'est donc d'abord en fonction de ce but que les aides sont choisies au moment de l'observation d'une difficulté chez les élèves.

Certaines de ces interventions permettent d'aider les élèves à résoudre ET à se représenter le problème. Elles sont privilégiées. D'autres aides, qui ne permettent que l'obtention du résultat sans favoriser les apprentissages, sont évitées.

Ce qui déclenche l'intervention	Intervention	Pour quel effet, dans quel but
Observation, un élève **fait autre chose** Vérification, question d'élève, ***j'ai rien compris***	faire relire la consigne	Recentrer sur le problème
Mauvaise interprétation de la consigne (ils font en dessous et pas à droite, question d'élève qui n'a pas compris un mot)	préciser la consigne, expliquer le vocabulaire	Faire en sorte que tout le monde résolve bien le même problème en comprenant ce qu'est une suite
Élève **ne démarre pas**, **feuille blanche**, calculs au hasard L'élève a **besoin de matériel**, il manque de place pour dessiner, son dessin est trop détaillé. *Je ne sais pas quoi faire*	faire dessiner qu'est-ce qui pourrait vous/t'aider ? faire ajouter un 4ème carré et demander de compter faire des hypothèses (pour un petit nombre de carrés) et vérifier	Faire visualiser le problème, favoriser la représentation, favoriser une attitude mathématique (argumenter-démontrer ; vérifier), encourager
Élève qui n'arrive pas à faire une partie du raisonnement Pour **initier un raisonnement**	guider une partie du raisonnement : fournir à l'élève certaines questions propres au raisonnement à mettre en œuvre sans lui donner la réponse…	Seulement si nécessaire, si rien d'autre ne semble possible, mais sans défavoriser l'attitude mathématique (la posture de recherche). Ces aides doivent permettre à l'élève de faire lui-même le raisonnement
Élèves **bloqués** à une étape, résultats éparpillés, **démarche correcte** qui devrait être étendue Élève qui semble avoir **compris, mais** qui n'arrive pas à en être conscient, élève à bout touchant	faire expliquer à un copain, à la maîtresse (j'ai pas compris), faire reformuler à un élève ce qui a été expliqué par son camarade	Favoriser la pensée mathématique, représentation, capacité à expliquer son raisonnement… Donner un sens au fait d'expliquer son raisonnement
Élève qui **demande** s'il fait juste, qui **s'arrête**	validations/invalidations des stratégies choisies validations/invalidations des résultats intermédiaires (pour 10 □ …), de la réponse au problème	Encouragement (pour la validation), mais seulement si nécessaire. Sinon défavorise l'attitude mathématique… Pour éviter que les élèves partent dans une piste erronée… mais là aussi, seulement si nécessaire
Un **résultat est donné**, pour vérifier. Toujours faire cette demande de vérification aux élèves, et pas seulement si le résultat est faux.	Demander de compter et vérifier sur le dessin (ou allumettes) Combien d'allumettes pour 4, pour 9, pour 10, pour 20, …	Favoriser la représentation du problème comme une suite, voire une fonction : il y a une façon de calculer le nombre d'allumettes en fonction du nombre de carrés. Favoriser une attitude scientifique et mathématique (hypothèse et vérification), favoriser le lien entre l'observation et le raisonnement.

Confusion entre les deux séries de nombres	questionner : c'est quoi ? des allumettes ou des carrés ? numéroter les carrés (1er, 2^{e}, 3^{e}, ...)	Mettre les choses au clair (si confusion), pointer sur les éléments importants, favoriser la représentation du problème comme fonction, guider vers l'écriture des résultats intermédiaires
Je me rappelle plus, élève **refaisant plusieurs fois le même calcul**, élève ne percevant pas le point commun entre ses essais, **résultats éparpillés** sur la feuille ne permettant pas de percevoir la régularité, la possibilité de calculer le nombre d'allumettes sans les compter	inviter à écrire les résultats intermédiaires suggérer une manière d'écrire les résultats intermédiaires (par exemple calcul détaillé : 10x3 + 1 ...)	Mettre les choses au clair, favoriser la représentation du problème comme fonction, favoriser une attitude de résolution de problèmes, développer une posture mathématique (trouver une règle) qui permette de déduire le nombre d'allumettes)
Moment de **découragement** à la fin	encouragement : « vous y êtes presque ! »	Encourager les élèves
À éviter	indication, indice donné à un élève	Favorise la « devinette » ATTENTION : on vise l'aide à la représentation, pas l'aide à la résolution

Autres difficultés des élèves

Lors de la vérification, certains élèves font des erreurs de comptage pour arriver à leur résultat erroné ! Cela marque bien la force du contrat selon lequel il s'agirait en mathématique de « faire un calcul simple avec les nombres de la donnée pour arriver à un résultat ».

Les élèves confondent souvent le nombre d'allumettes et le nombre de carrés. C'est à la fois une difficulté liée au concept de fonction (voir les commentaires p. 8), mais la raison est aussi liée au nombre 3, qui est à la fois le nombre d'allumettes ajouté à chaque carré (et donc à la fonction $n \longmapsto 3n + 1$) et le nombre initial de carrés. Par ailleurs, certains élèves font 99 × 3 en multipliant les nombres de l'énoncé.

Apprentissages des élèves

Les élèves entraînent la représentation d'un problème. Ils apprennent à reconnaître et établir des suites arithmétiques, voire à percevoir la notion de fonction comme relation entre deux suites de nombres.

Limites et points d'attention

- Certains élèves continuent à ne pas vraiment se représenter le problème : tous les élèves ont fait des progrès, mais certains ont encore besoin du guidage de l'enseignant-e.
- Les aides sont difficiles à apporter à une classe entière. Il est possible de faire travailler ce problème en demi-classe, tout en gardant une mise en commun.
- Une bonne préparation incluant l'identification des stratégies, des difficultés, des erreurs et des aides en fonction des observations permet de mieux gérer la gestion d'un plus grand nombre d'élèves.
- La préparation et la gestion de problèmes de recherche est difficile, au début surtout. Il demeure important d'en proposer régulièrement, voire de permettre aux élèves de revenir plusieurs fois sur un même problème, sans toutefois épuiser l'enthousiasme des élèves et de l'enseignant-e.
- Le fait d'habituer les élèves à répondre au problème à partir des nécessités mathématiques du problème et non pas en recueillant des indices chez l'enseignant-e ou dans les habitudes de classe, prend du temps. Cette modification du contrat didactique nécessite une pratique régulière. Il est donc nécessaire de pratiquer le type d'aides décrit ci-dessus le plus souvent possible, voire dans toutes les activités mathématiques !

Suite, prolongements

Voir fiche élève en annexes 2, 3 et 4. Ces prolongements sont proposés aux élèves qui ont terminé. Ils permettent d'affermir le lien entre la façon de « voir » les allumettes et la manière de les compter.

Il est évidemment possible de créer d'autres configurations (par exemple de faire des triangles…) ou de demander aux élèves d'en inventer !

Avant le travail sur cette leçon, le groupe LS avait entrepris un autre cycle sur la résolution de problème avec l'intention de travailler la représentation du problème par les élèves.

Ce travail est disponible sur le site www.hepl.ch/3LS .

C'est également dans la direction du travail sur la résolution de problème et sur la représentation des problèmes que cette tâche pourra être prolongée.

Commentaires (développement de la fiche prof)

Contenu mathématique

Comme indiqué plus haut, une manière de se représenter le problème est de considérer des avec une allumette pour fermer. Dans ce cas, la solution s'obtient en comptant 99 fois 3 allumettes et en ajoutant 1 allumette.
Le problème peut alors se représenter comme une fonction qui fait correspondre à chaque nombre de carrés un nombre d'allumettes.

Nombre de carrés	Nombre d'allumettes
1	4
2	7
3	10
⋮	⋮
99	298
n	3×n+1

On peut aussi exprimer cette fonction $n \longmapsto 3 \times n+1$ de différentes manières qui correspondent à différentes représentations du problème, par exemple :

ce qui correspond au contenu du PER pour la 6H :

> *Une suite est dite arithmétique si on ajoute toujours le même nombre pour passer d'un terme au suivant.*
> *En écriture mathématique et en citant le lexique du PER :*
>
> > *Une suite (U_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé la raison de la suite, tel que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$.*

Dans le cas des 99 carrés, il s'agit d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 4 (U_1=4, U_2= 4+3 , etc...) .

Les deux cadres de représentation sont liés et il ne s'agit pas de les travailler en tant que tel avec des élèves de 6H. De même, les expressions ne sont pas données dans le registre mathématique, mais de manière verbale (par exemple, pour n+n+n+1 « une allumette en haut par carré, une allumette en bas par carré et une allumette verticale par carré, avec une de plus »), voire gestuelle.

L'important ici est de permettre aux élèves de lier cette représentation du problème aux calculs à effectuer pour obtenir la solution.

La notion de fonction, sous-jacente à la notion de suite arithmétique, est fondamentale en mathématique et elle est utilisée dans tous les domaines scientifiques. Elle est travaillée explicitement dans les degrés secondaires, mais elle est déjà présente implicitement aux degrés primaires. Cette notion est également difficile, car elle ne porte pas que sur les objets (ici les nombres), mais sur le lien entre ces objets. On a donc, dans le problème des 99 carrés, une première suite de nombres (le nombre de carrés), une seconde suite de nombres (le nombre d'allumettes) et la relation entre ces deux nombres. Les élèves que nous avons observés confondaient ainsi parfois les deux suites et, quand ils parlaient d'un nombre, ne savaient plus s'il s'agissait d'un nombre de carrés ou d'un nombre d'allumettes.

La résolution de problèmes dans l'enseignement...

La résolution de problèmes est une activité typique en mathématique.
Dans l'enseignement, elle peut être considérée de trois manières selon ses buts. On peut enseigner **pour** résoudre des problèmes (les notions mathématiques enseignées ont alors pour finalité de résoudre des problèmes), on peut enseigner **à** résoudre de problèmes (notamment par l'apprentissage de stratégies de résolution de problème, par exemples inspirées de Polya, 1965), et on peut enseigner **par** le problème. L'approche choisie par le PER est d'abord d'enseigner **par** le problème, mais cela implique aussi d'enseigner **à** résoudre des problèmes, sans toutefois donner des "trucs", efficaces seulement dans certaines situations particulières mais qui

pourraient empêcher les élèves d'entrer dans le problème et d'apprendre **par** la résolution du problème.
Nous savons que c'est au travers de l'activité de résolution de problème que l'élève construit des connaissances mathématiques. La difficulté principale se situe au niveau de la traduction du problème exprimé dans un langage non scientifique en une expression mathématique de celui-ci. L'élève doit donc commencer par se représenter le problème et « inventer » une procédure pour le résoudre. Il ne s'agit donc pas seulement de « deviner la bonne opération », mais bien de la choisir selon sa compréhension du problème. Dans le monde des mathématiciens, un problème peut occuper un scientifique des années durant (parfois toute une vie). Ainsi, résoudre un problème n'est pas trouver instantanément la procédure à appliquer, mais bien tâtonner, chercher, essayer, vérifier, essayer encore, tester, vérifier encore, etc. Or, de nombreux élèves pensent que si la solution ne leur « saute » pas aux yeux, ils sont incapables de résoudre le problème. Ces élèves n'ont pas construit la posture attendue par les mathématiques et se décourageront rapidement. L'enseignant-e a donc la difficile mission d'initier les élèves au goût de cette recherche, à la persévérance et à la construction d'une conception qui intègre le fait de ne pas trouver tout de suite la réponse comme faisant partie intégrante de l'activité de résolution de problèmes.
Dans cette perspective, aider les élèves dans la résolution de problème relève d'un guidage affectif (aide à la persévérance, sentiment d'auto-efficacité), cognitif (poser des questions qui invitent l'élève à chercher, tâtonner, vérifier…) et métacognitif (favoriser la prise de conscience des processus mis en œuvre).

Construction de la leçon

Nous avons focalisé la construction de la leçon sur les aides à apporter aux élèves en fonction de leurs difficultés et, surtout, en fonction du but de ces aides. Notre objectif était ici de favoriser la représentation du problème chez les élèves et de réfléchir à la manière de favoriser chez eux le développement de la capacité à se représenter un problème.
Le problème des 99 carrés nous a semblé idéal pour ce travail, car il permet de bien mettre en évidence le lien entre la manière « de voir le problème » et la manière « de calculer ». C'est bien cet aspect que nous avons mis en avant plutôt que celui des suites arithmétiques ou de fonctions.

La seule modification que nous avons apportée à la tâche est de proposer l'énoncé sur une demi-feuille horizontale inciter les élèves à poursuivre la suite de carrés « à la suite » et non pas « en-dessous ».

Références

- Coppé, S., & Houdement, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N, 69*, 53-62.
- Coppé, S., & Houdement, C. (2009). *Résolution de problèmes a l'école primaire française: perspectives curriculaire et didactique.* Paper presented at the Colloque de la COPIRELEM.
- Dumas, J.-P., & Jaquet, F. (2001). Les tentations de la proportionnalité. *Math-Ecole*, 198, 33-42.
- Houdement, C. (1999). Le choix des problèmes pour la "résolution de problèmes". *Grand N, 63*, 59-76.
- Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N, 71*, 7-23.
- Julo, J. (2000). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? In COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXVIIe Colloque Inter-IREM de Chamonix* (pp. 9-28). Grenoble: IREM de Grenoble.
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N, 69*.
- Peltier, M.-L., Briand, J., Ngono, B. & Vergnes, D. (2006). *Euromaths, CM1*. Paris: Hatier.
- Polya, G. (1945/1965). *Comment résoudre un problème* (C. Mesnage, trad.). Paris: Dunod
- Van De Walle, J. A., Karp, K., Bay-Williams, J. M., Wray, J. A. & Rigelman, N. R. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Harlow: Pearson.

Annexes

1. Fiche élève : les 99 carrés (2 exemplaires)
2. Prolongement 1 (tiré du *livre du maître 4P*[1])
3. Prolongement 2 (tiré du *livre du maître 4P*)
4. Prolongement 3 (tiré du livre *Mathématiques 9-10-11*[2])

[1] Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999). *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

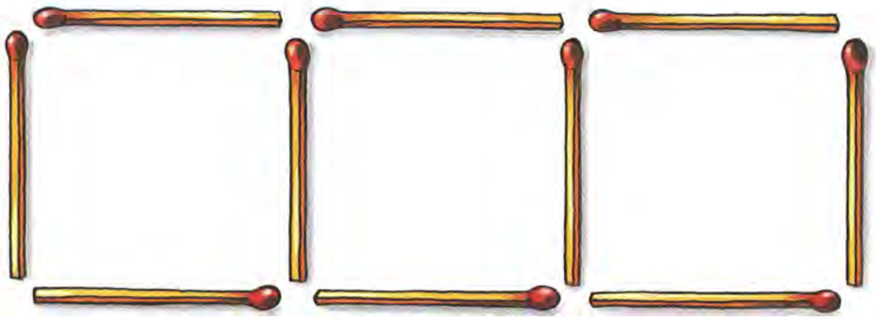
[2] Corminboeuf, I., Hostettler, T., Odiet, D. & Mante, M. (2011-2013). *Mathématiques 9-10-11 (7 volumes)*. Le Mont-sur-Lausanne et Neuchâtel: Loisirs et pédagogie et Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.

Les 99 carrés

Prénom : ……………………………………..

Pour former cette suite de 3 carrés, il a fallu 10 allumettes.

Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 99 carrés?

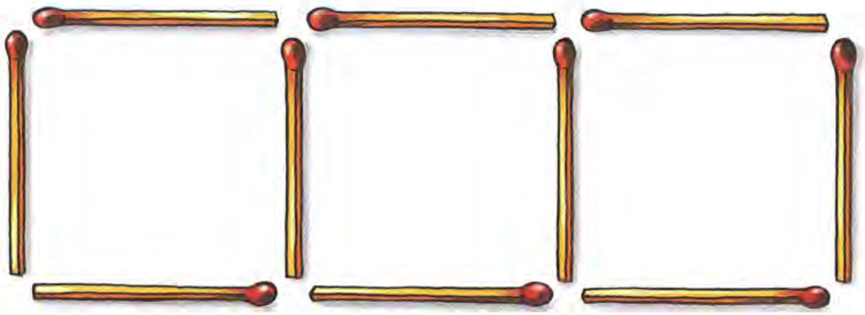


Les 99 carrés

Prénom : ……………………………………..

Pour former cette suite de 3 carrés, il a fallu 10 allumettes.

Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 99 carrés?



Prolongement 1
Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 427 carrés?

Prolongement 2
Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 736 de ces nouveaux carrés?"

Prolongement 3
Le premier carré nécessite 4 allumettes, le deuxième nécessite 12 allumettes et le troisième en nécessite 24.
De combien d'allumettes a-t-on besoin pour faire, de la même façon, un grand carré de 10 allumettes de côté ?