

Plan de leçon¹: Nombres relatifs

Degrés	9VP	Sujet mathématique	Nombres relatifs : introduction et multiplication
Plan de leçon réalisé par Coralie Berthoud, Thomas D'Eysmond, Leslie Jonquet, Michael Mauron, Sara Mobilia, Sébastien Noll, Delphine Schüpbach, Amine Slim, Karim Steiner, Robert Tye (étudiants HEP MS1), Stéphane Clivaz, Sara Presutti (HEP Vaud).			

1. Titre de la leçon

Introduction des nombres relatifs : première approche et multiplication des relatifs

2. Thème de recherche

Objectifs à long terme pour les élèves et moyens de les atteindre

L'objectif à moyen terme pour les élèves est de comprendre que les propriétés qu'ils ont apprises sur les nombres entiers positifs se généralisent à tous les nombres réels. Ils doivent être capables d'effectuer des opérations avec les nombres réels pour pouvoir, à long terme, généraliser ces propriétés à l'algèbre.

3. Contexte et recherches sur le contenu

Pourquoi nous avons choisi de traiter ce sujet, en quoi il est délicat pour les élèves et/ou pour les enseignants

Les ressources que nous avons étudiées et ce que nous avons appris à propos du contenu et les manières de penser des élèves

L'enseignement des nombres relatifs et des opérations avec ces nombres est un des sujets les plus délicats à enseigner au secondaire 1. Pourtant il est peu traité en formation et un temps très restreint lui est accordé dans les découpages officiels vaudois (2 à 3 semaines). De plus, ce sujet représente une forme de rupture dans la scolarité mathématique des élèves puisque, pour la première fois, les nombres utilisés et les opérations effectuées obéissent à des nécessités mathématiques ne correspondant pas à une représentation concrète. En ce sens, le travail sur les relatifs anticipe le travail algébrique.

Plusieurs articles ont été consultés (voir bibliographie en annexe 5).

¹ Adaptation du canevas de plan de leçon élaboré par le Lesson Study Group du Mills College, Oakland, CA (USA): <https://lessonresearch.net/plan-step/take-stock/>

4. Liens avec le plan d'études (PER)

Connaissances préalables	Éléments du plan d'études relatifs à cette séquence et plus particulièrement à la leçon de recherche	Connaissances futures
<p><i>MSN 22 — Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres rationnels...</i> ...en utilisant des propriétés des nombres entiers</p> <p><i>MSN 23 — Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs...</i> ...en traduisant les situations en écritures additive, soustractive, multiplicative ou divisive ...en utilisant les propriétés des quatre opérations ...en construisant, en exerçant et utilisant des procédures de calcul (calcul réfléchi, algorithmes, calculatrice, répertoires mémorisés) avec des nombres rationnels positifs</p> <p>A la fin du cycle :</p> <ul style="list-style-type: none"> - résout des problèmes additifs, soustractifs, multiplicatifs (6e année) et divisifs (8e année) avec des nombres naturels inférieurs à 1000 (6e année), avec des nombres ayant au plus 2 décimales inférieurs à 10'000 (8e année) ; connaît et utilise les fonctions de base d'une calculatrice pour effectuer une opération (+, -, x, :) - utilise des procédures de calcul réfléchi pour effectuer de manière efficace une addition, une soustraction (6e année), une multiplication, ou 	<p><i>MSN 32-Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels...</i> ...en ordonnant des nombres réels ...en utilisant des propriétés des nombres réels ...en organisant les nombres réels à travers les opérations</p> <p>PROGRESSION DES APPRENTISSAGES Nombres : Comparaison, approximation, encadrement, représentation sur une droite et ordre de grandeur de nombres écrits sous forme entière dans \mathbb{Z} Calcul : Utilisation de procédures de calcul réfléchi ou de calcul mental avec des nombres entiers relatifs de -100 à 100 (+, -, ;, :)</p> <p>INDICATIONS PÉDAGOGIQUES L'ordre dans les nombres relatifs peut poser problème. Dire : « - 7600 est plus petit que - 4 » peut sembler absurde à un élève. Dans ce contexte, il doit comprendre ceci comme « - 7600 vient avant - 4 ». Travailler donc l'ordre des nombres relatifs en relation avec leur emplacement sur la droite numérique. Mettre en évidence par des activités les différentes significations des signes + et - :</p>	<p><i>MSN 33 — Résoudre des problèmes numériques et algébriques...</i> ...en mobilisant l'algèbre comme outil de calcul (équations), de preuve ou de généralisation</p> <p>PROGRESSION DES APPRENTISSAGES Algèbre – Calcul littéral Connaissance et utilisation des règles et conventions usuelles d'écriture algébrique ; addition, réduction de monômes ou polynômes</p> <p>Algèbre – Équations Résolution d'équations du premier degré à une inconnue à l'aide des règles d'équivalence Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues à l'aide des méthodes de combinaison linéaire et de substitution</p> <p><i>MSN 35 — Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques...</i> ...en mobilisant des représentations graphiques (codes, schémas, tableaux, graphiques...) ...en triant, organisant et interprétant des données ...en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques (fonctions, statistiques, algèbre...)</p>

<p>une division (8e année) -effectue un calcul comportant une suite d'opérations dont l'ordre est indiqué par des parenthèses, sans imbrication -utilise un algorithme d'addition, de soustraction, de multiplication, de division euclidienne avec des nombres naturels inférieurs à 1000 (6e année) et avec des nombres inférieurs à 10'000 dont les termes ont au plus 2 décimales (8e année)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ils peuvent représenter le signe d'un nombre ; • ils peuvent représenter des signes opératoires (addition, soustraction) ; • le signe moins peut également représenter l'opposé d'un nombre : $-(-5)=+5$; <p>Une confusion peut apparaître entre les règles des signes de l'addition et de la multiplication des relatifs après l'enseignement de cette dernière opération.</p>	<p>Les élèves doivent maîtriser les propriétés et donc les opérations dans les réels pour ensuite le généraliser à l'algèbre.</p> <p>Dans le futur, certains élèves seront confrontés aux nombres complexes : cet ensemble est créé comme extension de l'ensemble des nombres réels, contenant en particulier un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$.</p>
--	---	---

5. Plan de la séquence

Leçon	Objectifs d'apprentissage et tâches
<p>1</p> <p>(Première leçon de recherche)</p>	<p>Objectif : Introduction des nombres relatifs</p> <p>Tâche(s) : Placement de nombres relatifs sur un axe, sur une feuille et dans le méso-espace, NO107, NO111, NO110, NO108, NO109. Leçon conçue sur deux périodes d'enseignement.</p>
<p>2</p>	<p>Objectif : Addition, soustractions des relatifs</p> <p>Tâche(s) : Partie non travaillée par le groupe et réalisée par l'enseignant de la classe</p>
<p>3</p> <p>(Deuxième leçon de recherche)</p>	<p>Objectif : Multiplication des relatifs</p> <p>Tâche(s) : Tableau de multiplication des entiers relatifs, NO144, NO145. Leçon conçue sur deux périodes d'enseignement.</p>
<p>4</p>	<p>Objectif : Divisions, calculs avec des relatifs mélangeant les opérations, écriture complète écriture simplifiée, autres problèmes</p> <p>Tâche(s) : Partie non travaillée par le groupe et réalisée par l'enseignant de la classe</p>

Première leçon de recherche

6. Objectif de la première leçon de recherche

Introduire le concept de nombre relatif en travaillant sur les points suivants :

- Notion du zéro absolu et relatif
- Comparaison et classement des nombres relatifs
- Concept de distance à 0, valeur absolue

7. Plan de la première leçon de recherche

Temps	Tâches et activités, points clés pour l'apprentissage, possibles réponses des élèves	Support et relances de l'enseignant	Éléments à observer
5'	Présentation de la démarche Distribution des panneaux avec les prénoms des élèves	--	--
10-15'	<p>Axe dessiné</p> <p>Axe fourni aux élèves avec un zéro placé à un endroit différent pour chaque élève.</p> <p>On demande aux élèves de mesurer la distance depuis zéro de chaque trait sur l'axe et de marquer sur l'axe.</p> <p>Poser la question de retrouver le trait à une certaine distance de zéro pour mettre en évidence l'existence de deux traits à la même distance et la nécessité de mettre des signes.</p> <p>Demande aux élèves de faire une deuxième fois, l'autre côté de l'axe, avec un zéro à un autre endroit.</p>	Feuille avec axe gradué	<p>Est-ce que les élèves comprennent qu'il y a deux traits possibles ?</p> <p>Est-ce qu'ils arrivent à déplacer le zéro ?</p> <p>Est-ce qu'ils proposent spontanément le signe pour distinguer les deux traits ?</p>
15'	<p>Activité dans le méso-espace</p> <p>Mettre un scotch dans la classe avec graduation au sol.</p> <p>Mettre une étiquette sur chaque élève - nombres de -9 à 9</p> <p>Place deux des élèves et demande aux autres de se placer sur la graduation</p> <p>Répéter l'exercice 3,4,5 fois en redistribuant les numéros aux élèves pour ne pas qu'ils se repèrent seulement par rapport à leur camarade.</p>	Scotch Feuilles avec les nombres numérotés de -9 à 9	Est-ce qu'ils comprennent qu'il y a une direction ?

<p>10'</p>	<p>Institutionnalisation (voir annexe 1) 1. Les nombres relatifs 2. Repérage</p>		<p>Observer si tous les élèves collent les documents, le complètent et utilisent des couleurs ou du stabilo.</p> <p>Observer la facilité (ou difficulté) des élèves à compléter la fiche puis à exemplifier.</p> <p>Relever les éventuelles questions des élèves.</p> <p>Être attentif à l'utilisation des () .</p>
<p>20'</p>	<p>Exercices Exercice NO107. Individuellement. Puis correction au tableau noir.</p> <p>Exercice NO111 : individuellement. Puis projeter le thermomètre et dessiner les températures une à une pour faciliter la correction de la partie a). Et b) expliquée par un élève. Leur montrer que la représentation verticale est aussi possible.</p> <p>Exercice NO110 : quelques minutes pour le faire par 2, puis discussion de classe pour montrer que le 0 est utilisé dans différentes représentations : 0 = rez-de-chaussée 0 = niveau de la mer 0 = T° où l'eau gèle 0 = niveau de la mer</p>	<p>Mettre la correction sur un transparent (thermomètre)</p> <p>Relance : que signifie le 0</p>	<p>RQ NO107 : Relever le type et la proportion d'erreurs pour chaque exercice NO111 : Observer si les élèves utilisent la représentation verticale ou s'ils repassent sur un axe horizontal</p> <p>NO110 : Observer comment les élèves modélisent les différentes situations (schémas, ...)</p>

15'	Institutionnalisation (voir annexe 1) 3. La valeur absolue 4. Comparer 2 nombres relatifs		Observer que tous les élèves complètent la feuille d'institutionnalisation Relever les éventuelles questions des élèves.
10'	Exercices Exercice NO108, NO109 En plus si temps : NO115, NO116	Avez-vous d'autres exemples ? (Calendrier avec années, l'argent, 0.- sur son compte ou des gains ou des dettes Jeu : 0 point, points positifs et négatifs)	Relever les éventuelles questions des élèves.

8. Notes sur l'observation

Éléments sur lesquels focaliser l'observation et la récolte des données pendant la leçon

Comment les élèves se positionnent dans le méso espace.
 Intérêt des élèves.
 Approche à l'idée de zéro relatif

9. Éventuelle planification du tableau noir

Non réalisée

Deuxième leçon de recherche

10. Objectif de la deuxième leçon de recherche

- Être capable de multiplier des nombres entiers relatifs
- Donner du sens aux règles de la multiplication entre deux relatifs
- Généraliser les propriétés des opérations aux nombres relatifs

11. Plan de la deuxième leçon de recherche

Temps	Tâches et activités, points clés pour l'apprentissage, possibles réponses des élèves	Support et relances de l'enseignant	Éléments à observer
3'	<p>Point départ</p> <p>Tableau multiplication : photocopié vide (voir annexe 2), jusqu'à 3·3 (assez grand, cellules carrées, feuilles carrées)</p> <p>En particulier $(-1) \cdot (-1) = ?$</p>		Combien d'élèves pensent que c'est...
10'	<p>Établissement des cas</p> <p>Laisser un temps de réflexion</p> <ul style="list-style-type: none"> • Au crayon • Ne pas coller pour le moment <p>Enseignant remplit au rétro sur dictée d'un élève pour chaque partie.</p>		Comment les élèves remplissent le tableau, est-ce que la multiplication par 0 est intégrée ?
20'	<p>Questions :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pourquoi c'est comme ça ? • Débat avec la classe, au TN, par étapes, on commence par ce qu'on sait : <p>0· ...</p> <p>On sait ! ($0 \cdot a = 0$, noter propriété en parallèle, voir planification du tableau)</p> <p>++</p> <p>On sait ! (addition itérée, noter propriété en parallèle)</p> <p>+-</p>	<p>Distinguer les règles d'action pratique (symétrie, + par -, amis et ennemis, ...) des raisons mathématiques (étendre les propriétés de la multiplication valables pour les naturels aux</p>	<p>Est-ce que les élèves maîtrisent +- et -+ ?</p> <p>Qui trouve le --?</p>

	<p>++</p> <p>Addition itérée</p> <p>Commutativité, ramené au cas précédent (noter propriété en parallèle)</p>	relatifs).	
	<p>--</p> <ul style="list-style-type: none"> • Retour à la question de départ • “Ça ne correspond pas à quelque chose de concret” • <i>Idée : on veut encore que les propriétés qu'on connaissait restent valables, en particulier la distributivité (exemple pour la rappeler : $6 \cdot 101$).</i> • « Monstration » au tableau noir du fait que $(-1) \cdot (-1) = +1$ (voir annexe 3) • Remplissage de la dernière partie du tableau • Colorer les produits positifs d'une même couleur, les produits négatifs d'une autre • Noter propriété de distributivité 	Indiquer que c'est important de comprendre la <i>monstration</i> (c'est la première fois qu'ils voient cela, mais c'est quelque chose qu'on fait assez souvent en maths), mais que ça ne sera pas à retenir.	Les élèves sont-ils attentifs, intéressés ? Trouvent-ils que le -- a du sens ? Pour quelles raisons ? Montrent-ils des indices de compréhension de la <i>monstration</i> ?
10'	<p>Institutionnalisation (voir annexe 4)</p> <p>Distribution (photocopies noir blanc) et projection au rétroprojecteur. Demander aux élèves de souligner avec les couleurs correspondant à celles utilisées dans le tableau de multiplication.</p> <p>Le truc mnémotechnique des amis et des ennemis est énoncé oralement, mais n'est pas écrit.</p>	L'enseignant insiste sur l'équivalence des diverses manières de retenir ce qui a été établi par des arguments mathématiques.	
15'	Exercices : NO 144, NO 145	Les élèves font les exercices	Comment les élèves font les

		sans calculatrice. L'enseignant se déplace dans les rangs	exercices ? Ex NO145 : est-ce qu'ils arrivent à bien distinguer les différentes opérations et à respecter les priorités ?
	<p>Lors de la prochaine leçon (suggestion) :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Correction NO 144, NO 145 avec calculatrice • Division : c'est la même chose, car diviser est équivalent à multiplier par l'inverse (vu avec les fractions). • NO 149 	Montrer comment mettre le signe puis s'autocorriger, rappeler la priorité des opérations (NO145)	

12. Notes sur l'observation

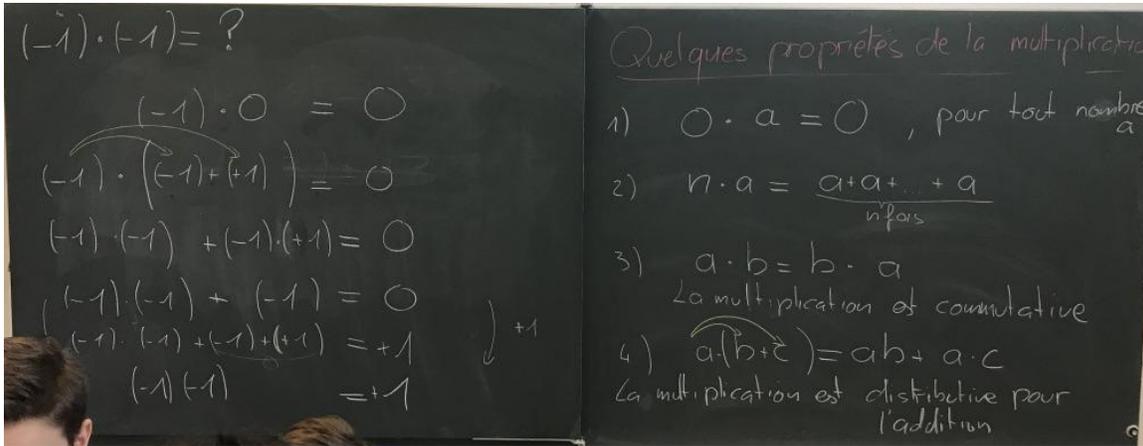
Éléments sur lesquels focaliser l'observation et la récolte des données pendant la leçon

Donner du sens à la multiplication, en particulier dans le cas du produit de deux nombres négatifs, est une tâche particulièrement difficile pour des élèves de 9^e. Il est donc important d'observer comment ils remplissent le tableau, d'où ils commencent et quelles sont les raisons de leurs choix.

En plus, comment ils se « convainquent » que $-- = +$? Est-ce qu'ils voient des raisons de symétrie, un pattern descendant ou ils arrivent à comprendre la nécessité mathématique d'étendre les propriétés des opérations à ce nouvel ensemble de nombres ?

13. Planification du tableau noir

Selon la disposition de la classe, 2 tableaux peuvent être affichés simultanément :



Au verso du tableau : place pour les exercices.

Au rétroprojecteur : tableau de multiplication (vierge puis rempli) puis règles institutionnalisées.

14. Réflexions à l'issue du cycle

Ce que nous avons appris

- Le terme et la notation de la valeur absolue semblent peu utiles à ce stade. Nous nous demandons si la notion de distance à zéro pourrait suffire en 9ème.
- Le moment de *monstration* peut intéresser les élèves de 9VP comme moment où ils voient des mathématiques se faire, sans devoir en retenir le détail. Ce moment peut leur faire percevoir un certain plaisir des mathématiques, mais il est nécessaire de bien expliciter le contrat didactique de ce moment particulier.
- L'aménagement du tableau noir est un aspect important de la leçon (tableau brouillon et tableau d'institutionnalisation). Il est aussi pertinent de choisir un code de couleur cohérent entre les transparents passés au rétroprojecteur et les couleurs utilisées au tableau noir.
- Ce n'est pas très apparent dans notre plan. Et pourtant, il est important de prévoir des relances et des questions aux élèves afin d'illustrer nos points. Par exemple, afin d'illustrer la commutativité, il est bien de demander $6 \cdot 7$ et $7 \cdot 6$ à deux élèves différents afin de voir leur temps de réponse. Pourquoi il y en a un qui est plus rapide ?

15. Annexe 1 : institutionnalisation première leçon de recherche (leçon 1)

Nombres relatifs

Nombres et opération - NO

1. Les nombres relatifs

Définition : Un nombre.....est un nombre :

..... (précédé d'un signe +) ou(précédé d'un signe -)

Exemples :

(- 2,5)	(+ 3)	(+ 0,0027)	(- 1518)	(0)
---------	-------	------------	----------	-----

(Remarque : Un nombre relatif peut aussi bien être un nombre entier qu'un nombre décimal)

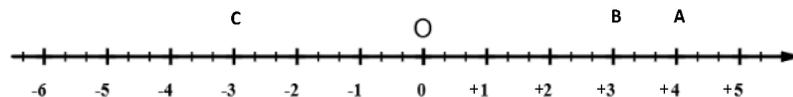
Cas particulier : 0 est le seul nombre à la fois et

(0 s'écrit sans signe).

2. Repérage

Définition : Sur une droite graduée horizontale, le nombre relatif qui permet de repérer

un point s'appelle son



- L'abscisse du point A est On note A(.....)

Définition : Sur une droite graduée la

correspond à la distance entre l'origine et le point qui a pour abscisse ce nombre.

La distance à zéro de (+4) est la longueur du segment [OA], c'est-à-dire 4.

La distance à zéro de (-3) est la longueur du segment [OC], c'est-à-dire 3

Définition : Deux nombres situés sur la droite numérique, de part et d'autre de 0 et à la

même distance de 0, sont dits

Exemples :

L'opposé de (0) est (0).	L'opposé de (- 6) est (+ 6).	L'opposé de (+ 4) est (- 4).	L'opposé de (+ 2,5) est (- 2,5).
--------------------------	------------------------------	------------------------------	----------------------------------

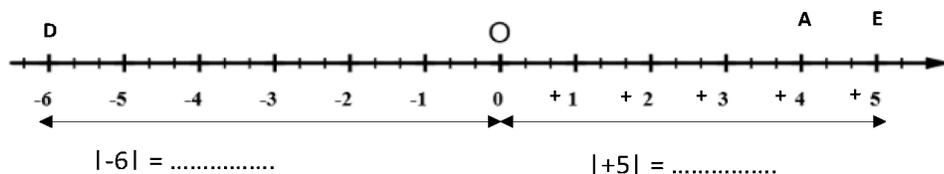
1

Les relatifs dans l'Aide-mémoire : voir page 18.

3. La valeur absolue

Définition : La d'un nombre relatif correspond à la **distance** à zéro de ce nombre.

En tant que **distance**, la valeur absolue d'un nombre relatif est toujours.....



Notation : La valeur absolue du nombre | | et se lit « valeur absolue de..... »

$ -3 = +3$	$ -53,136 = +53,136$	$ 0 = 0$	$ +0,0036 = +0,0036$
-------------	-----------------------	-----------	-----------------------

4. Comparer deux nombres relatifs

Par convention, on dira que le plus petit de deux nombres relatifs est celui qui est placé le plus à gauche sur la droite numérique horizontale. On utilisera les symboles $<$ et $>$ comme pour les nombres décimaux positifs.

Exemples :

$(+2) < (+5)$	$(0) < (-1)$	$(-3) < (+6)$	$(+2) > (-2,5)$	$(-10) < (-3)$
---------------	--------------	---------------	-----------------	----------------

Les relatifs dans l'Aide-mémoire : voir page 18.

Annexe 2 : Tableau de multiplication, deuxième leçon de recherche (leçon 3)

↻	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
+3							
+2							
+1							
0							
-1							
-2							
-3							

↻	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
+3	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9
+2	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6
+1	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
0	0	0	0	0	0	0	0
-1	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
-2	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6
-3	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9

Annexe 3 : Monstration $(-1) \cdot (-1) = 1$

Question : $(-1) \cdot (-1) = ?$

$$(-1) \cdot 0 = 0$$

$$(-1) \cdot [(-1) + (+1)] = 0$$

Distributivité indiquée par des flèches

$$(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (+1) = 0$$

$$(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$$

Donc $(-1) \cdot (-1)$ est l'opposé de (-1) , c'est-à-dire que

$$(-1) \cdot (-1) = +1$$

Annexe 4: Institutionnalisation leçon 3

nombre positif	fois	nombre positif	égale	nombre positif
(+3)	·	(+2)	=	(+6)

nombre positif	fois	nombre négatif	égale	nombre négatif
(+3)	·	(-3)	=	(-6)

nombre négatif	fois	nombre positif	égale	nombre négatif
(-3)	·	(+2)	=	(-6)

nombre négatif	fois	nombre négatif	égale	nombre positif
(-3)	·	(-3)	=	(+6)

On peut aussi dire:

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif

Annexe 5: Bibliographie

- Boyé, A. (2002). *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs*. IREM de Nantes.
<http://numerisation.univ-irem.fr/AAP/AAP09005/AAP09005.pdf>
- Corminboeuf, I., Hostettler, T., Odiet, D., & Mante, M. (2011). *Mathématiques 9*. Le Mont-sur-Lausanne et Neuchâtel: Loisirs et pédagogie et Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- Groupe Didactique IREM d'Aquitaine. (2008). Enseigner les nombres relatifs au collège. *Repères-IREM(73)*, 59-72. http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/73_article_497.pdf
- Ministère de l'Education Nationale de l'Enseignement supérieur et de la recherche. (2016). *Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs*.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_relatifs/02/8/RA16_C4_MATH_doc_maitre_nombres_relatifs_comparer_calculer_resoudre_N.D_552028.pdf.
- Vuille, D., Powolny, F., Hoznour, I., Kaeslin, M., Olivier Guignard, Mauroux, L., & Clivaz, S. (2017). *Addition-soustraction des relatifs*.
http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/3LSplan_9H_relatifs_2017_hepvaud.pdf